前情提要

前情提要

我们定义了两种“可定义”概念

- 结构内的可定义性：给定结构
  - 关于该结构论域上的 k 元关系的性质
  - 由一个公式定义
- 定义结构类：给定语言
  - 关于该语言的结构类的
  - 由一则闭语句定义（初等类）；由一集闭语句定义（广义初等类）

前情提要

我们定义了两种“可定义”概念

- 结构内的可定义性：给定结构
  - 关于该结构论域上的 k 元关系的性质
  - 由一个公式定义
- 定义结构类：给定语言
  - 关于该语言的结构类的
  - 由一则闭语句定义（初等类）；由一集闭语句定义（广义初等类）

前情提要

我们定义了两种“可定义”概念

- 结构内的可定义性：给定结构
  - 关于该结构论域上的 k 元关系的性质
  - 由一个公式定义
- 定义结构类：给定语言
  - 关于该语言的结构类的
  - 由一则闭语句定义（初等类）；由一集闭语句定义（广义初等类）

前情提要

我们定义了两种“可定义”概念

- 结构内的可定义性：给定结构
  - 关于该结构论域上的 k 元关系的性质
  - 由一个公式定义
- 定义结构类：给定语言
  - 关于该语言的结构类的
  - 由一则闭语句定义（初等类）；由一集闭语句定义（广义初等类）

前情提要

我们定义了两种“可定义”概念

- 结构内的可定义性：给定结构
  - 关于该结构论域上的 k 元关系的性质
  - 由一个公式定义
- 定义结构类：给定语言
  - 关于该语言的结构类的
  - 由一则闭语句定义（初等类）；由一集闭语句定义（广义初等类）

前情提要

我们定义了两种“可定义”概念

- 结构内的可定义性：给定结构
  - 关于该结构论域上的 k 元关系的性质
  - 由一个公式定义
- 定义结构类：给定语言
  - 关于该语言的结构类的
  - 由一则闭语句定义（初等类）；由一集闭语句定义（广义初等类）

前情提要

我们定义了两种“可定义”概念

- 结构内的可定义性：给定结构
  - 关于该结构论域上的 k 元关系的性质
  - 由一个公式定义
- 定义结构类：给定语言
  - 关于该语言的结构类的
  - 由一则闭语句定义（初等类）；由一集闭语句定义（广义初等类）

前情提要

同态与同构：给定同语言的两个结构，其间的对应

- 同态："保持"对谓词符号、函数符号、常数符号的解释
- 嵌入：同态且"保持"对等词的解释
- 满同态：同态且"保持"对量词的解释
- 同构："保持"所有解释，逻辑等同

前情提要

同态与同构：给定同语言的两个结构，其间的对应

- 同态：“保持”对谓词符号、函数符号、常数符号的解释
- 嵌入：同态且“保持”对等词的解释
- 满同态：同态且“保持”对量词的解释
- 同构：“保持”所有解释，逻辑等同

前情提要

同态与同构：给定同语言的两个结构，其间的对应

- 同态：“保持”对谓词符号、函数符号、常数符号的解释
- 嵌入：同态且“保持”对等词的解释
- 满同态：同态且“保持”对量词的解释
- 同构：“保持”所有解释，逻辑等同

前情提要

同态与同构：给定同语言的两个结构，其间的对应

- 同态：“保持”对谓词符号、函数符号、常数符号的解释
- 嵌入：同态且“保持”对等词的解释
- 满同态：同态且“保持”对量词的解释
- 同构：“保持”所有解释，逻辑等同

前情提要

同态与同构：给定同语言的两个结构，其间的对应

- 同态： “保持”对谓词符号、函数符号、常数符号的解释
- 嵌入：同态且“保持”对等词的解释
- 满同态：同态且“保持”对量词的解释
- 同构： “保持”所有解释，逻辑等同

前情提要

- 同态定理：$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$
- 自同构：$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$
- 证明（结构内）不可定义的一个方法：
  由同态定理，所有可定义的关系在自同构下“保持”。
  构造一个自同构，使之不保持

前情提要

- 同态定理：$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$
- 自同构：$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$
- 证明（结构内）不可定义的一个方法：

  由同态定理，所有可定义的关系在自同构下“保持”。

  构造一个自同构，使之不保持

前情提要

- 同态定理：$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$
- 自同构：$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$
- 证明（结构内）不可定义的一个方法：

  由同态定理，所有可定义的关系在自同构下“保持”。

  构造一个自同构，使之不保持

前情提要

- 同态定理：$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$
- 自同构：$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$
- 证明（结构内）不可定义的一个方法：

  由同态定理，所有可定义的关系在自同构下“保持”。

  构造一个自同构，使之不保持

吁，终于……

一阶逻辑希尔伯特系统的可靠性与完全性定理

可靠性定理

定理 (可靠性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$ 的公式集 Γ 和公式 φ，

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

Proof.

对证明序列归纳

可靠性定理

定理 (可靠性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$ 的公式集 Γ 和公式 φ，

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

Proof.

对证明序列归纳

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

因此，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$

因此，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \le i \le n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

因此，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

因此，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$

因此，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \le i \le n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

因此，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：下列公式的全称概括

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

若语言中含有等词，则还有

5. $x \approx x$
6. $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

引理

$$\vDash \theta \implies \vDash \forall x\theta$$

因此，如果 θ 是有效的，那么它的所有全称概括都是有效的。所以，只需证所列 1-6 组的公式是有效的。

可靠性定理

引理

$$\models \theta \quad \Rightarrow \models \forall x\theta$$

因此，如果 θ 是有效的，那么它的所有全称概括都是有效的。所以，只需证所列 1-6 组的公式是有效的。

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

任给 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 赋值 s，定义命题逻辑真值指派 $v_{(\mathfrak{A},s)}$，使得对任意素公式 β 有

$$v_{(\mathfrak{A},s)}(\beta^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \vDash \beta$$

归纳证明，对所有 $\mathcal{L}$ 公式 α 有，

$$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha$$

若 α^P 是重言式，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$，有 $\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1$

可靠性定理

任给 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 赋值 s，定义命题逻辑真值指派 $v_{(\mathfrak{A},s)}$，使得对任意素公式 β 有

$$v_{(\mathfrak{A},s)}(\beta^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \vDash \beta$$

归纳证明，对所有 $\mathcal{L}$ 公式 α 有，

$$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha$$

若 α^P 是重言式，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$，有 $\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1$

可靠性定理

任给 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 赋值 s，定义命题逻辑真值指派 $v_{(\mathfrak{A},s)}$，使得对任意素公式 β 有

$$v_{(\mathfrak{A},s)}(\beta^P) = 1 \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, s) \models \beta$$

归纳证明，对所有 $\mathcal{L}$ 公式 α 有，

$$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1 \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, s) \models \alpha$$

若 α^P 是重言式，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$，有 $\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1$

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

假设 t 可以在公式 φ 中替换变元 x 并且 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，我们只需证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t$。由下述引理，

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

我们只需证：$(\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$，而由 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，这显然成立

可靠性定理

假设 t 可以在公式 φ 中替换变元 x 并且 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x \varphi$，我们只需证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t$。由下述引理，

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

我们只需证：$(\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$，而由 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x \varphi$，这显然成立

可靠性定理

假设 t 可以在公式 φ 中替换变元 x 并且 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，我们只需证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t$。由下述引理，

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

我们只需证：$(\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$，而由 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，这显然成立

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

Proof.

对公式 φ 归纳

∎

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

Proof.

对公式 φ 归纳

- φ 是原子公式　引理： $\bar{s}(u_t^x) = \overline{s^x_{\bar{s}(t)}}(u)$

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

Proof.

对公式 φ 归纳

- φ 是原子公式 引理： $\bar{s}(u_t^x) = \overline{s^x_{\bar{s}(tR)}}$

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

Proof.

对公式 φ 归纳

- φ 是几个子公式的布尔组合

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

Proof.

对公式 φ 归纳

- $\varphi = \forall y \psi$

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

一阶逻辑希尔伯特系统的完全性

完全性定理

定理 (完全性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。Γ 是 $\mathcal{L}$ 公式集，φ 是 $\mathcal{L}$ 公式，则

$$\Gamma \vDash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$

引理

给定语言 $\mathcal{L}$，下述等价：

- 对任意公式集 Γ、公式 φ，$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
- 对任意公式集 Σ，如果 Σ 一致，那么 Σ 可满足

因此，我们只需要证明后者

完全性定理

证明思路 给定一致的 $\mathcal{L}$ 公式集 Σ，我们要构造一个它的 $\mathcal{L}$ 模型 $\mathfrak{A}$ 以及赋值 s：

- 将 Σ 扩张为一个极大一致集 Δ，以获得足够多的信息
- 将 $\mathcal{L}$ 中的所有项作为论域中元素
- 变元、常数符号、函数符号解释依据项本身的构造
- 关系依据 Δ 中原子公式的提示
- 证明 $(A, s) \models \Delta$

习题

无