前情提要

前情提要

前束范式定理

证明的难点:对公式中所含量词个数归纳

前情提要

一阶逻辑的语义

- 语言 £ 中参数符号的语义——£ 结构
- 自由变元的语义——赋值 s: V → |X|
- 项的语义——由 \mathfrak{A} 和 s 唯一决定的 $\bar{s}: T_{\mathcal{L}} \to |\mathfrak{A}|$
- 公式的语义——满足关系

一阶逻辑的语义(续)

定义 (语义蕴含)

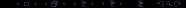
给定语言 \mathcal{L} 。称公式集 Γ 逻辑蕴含(logically imply) φ ,记 $\Gamma \models \varphi$,当且仅当对任意 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 和每个 \mathfrak{A} 赋值 s 都有,如果 \mathfrak{A} 和 s 满足 Γ 中所有公式,那么 \mathfrak{A} 和 s 也满足 φ

- 以后 = 依语境主要表示满足关系和逻辑蕴涵关系
- $\blacksquare \alpha \models \beta$ 即 $\{\alpha\} \models \beta$; $\alpha \models \exists \beta$ (逻辑等效)
- ⊨ α 即 ∅ ⊨ α (逻辑有效)

定义 (语义蕴含)

给定语言 \mathcal{L} 。称公式集 Γ 逻辑蕴含(logically imply) φ ,记 $\Gamma \models \varphi$,当且仅当对任意 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 和每个 \mathfrak{A} 赋值 s 都有,如果 \mathfrak{A} 和 s 满足 Γ 中所有公式,那么 \mathfrak{A} 和 s 也满足 φ 约定

- 以后 = 依语境主要表示满足关系和逻辑蕴涵关系
- α ⊨ β 即 {α} ⊨ β ; α ⊨ ∃ β (逻辑等效)
- $\models \alpha$ 即 $\emptyset \models \alpha$ (逻辑有效)



引理(合同引理)

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 。任给 \mathfrak{A} 赋值 s_1, s_2 。如果它们关于在公式 φ 中自由出现的变元的赋值相同,那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi$

Proof.

对公式 φ 归纳

引理(合同引理)

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 。任给 \mathfrak{A} 赋值 s_1, s_2 。如果它们关于在公式 φ 中自由出现的变元的赋值相同,那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi$

Proof.

对公式 φ 归纳

约定:

- 我们用 $\varphi(x_1,...,x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1,...,x_n$
- 对 $\varphi(x_1, \ldots x_n)$, 我们用 $\mathfrak{U} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ 表示 $(\mathfrak{U}, s) \models \varphi$, 其中 $s(x_i) = d_i$ ($1 \le i \le n$)

约定:

- 我们用 $\varphi(x_1,...,x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1,...,x_n$
- 对 $\varphi(x_1, \ldots x_n)$, 我们用 $\mathfrak{A} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$, 其中 $s(x_i) = d_i$ ($1 \le i \le n$)

推论

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 。给定语言对任何闭语句 σ ,或者

- (1) 对所有 ¾ 赋值 s 都有 , (¾, s) ⊧ σ ; 或者
- (2) 对所有 ¼ 赋值 s 都有 , (¾, s) ⊭ σ

定义(真)

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构、 \mathfrak{L} 中闭语句 σ 。我们称 σ 在 \mathfrak{U} 中为 \mathbf{q} ,记 $\mathfrak{U} \models \sigma$,当且仅当 (1) 成立

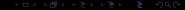
推论

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 。给定语言对任何闭语句 σ ,或者

- (1) 对所有 ¾ 赋值 s 都有 , (¾, s) ⊧ σ ; 或者
- (2) 对所有 ¼ 赋值 s 都有 , (¾, s) ⊭ σ

定义(真)

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构、 \mathfrak{L} 中闭语句 σ 。我们称 σ 在 \mathfrak{U} 中为 真 , 记 $\mathfrak{U} \models \sigma$, 当且仅当 (1) 成立



例

证明或证否下列命题:

- $\forall v_1 Q v_1 \models Q v_1$
- $Qv_1 \models \forall v_1 Qv_1$

例

证明或证否下列命题:

- $\forall v_1 Q v_1 \models Q v_1$
- $Qv_1 \models \forall v_1 Qv_1$

可定义性

Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

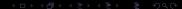
Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

给定语言 \mathcal{L} , \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 以及 \mathcal{L} 中公式 $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$, 我们 称 φ 在结构 \mathfrak{A} 中定义了 k-元关系

$$\{(a_1,\ldots,a_k)\mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_k]\}$$

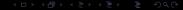
我们称一个 k-元关系 $R \subset |\mathfrak{A}|^k$ 是 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 中可定义的, 当且仅当存在一个 \mathcal{L} 公式在结构 \mathfrak{A} 中定义它



给定语言 \mathcal{L} , \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 以及 \mathcal{L} 中公式 $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$, 我们 称 φ 在结构 \mathfrak{A} 中定义了 k-元关系

$$\{(a_1,\ldots,a_k)\mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_k]\}$$

我们称一个 k-元关系 $R \subset |\mathfrak{A}|^k$ 是 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 中可定义的, 当且仅当存在一个 \mathcal{L} 公式在结构 \mathfrak{A} 中定义它

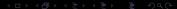


例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$, 以及 \mathcal{L} 结构 $(\{a,b,c\},\{(a,b),(a,c)\})$, 如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

{a, b, c} 的哪些子集是可定义的?哪些二元关系是可定义的?

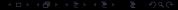


例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$, 以及 \mathcal{L} 结构 $(\{a,b,c\},\{(a,b),(a,c)\})$, 如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

{a, b, c} 的哪些子集是可定义的?哪些二元关系是可定义的?



例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$, 以及 \mathcal{L} 结构 $\big(\{a,b,c\},\{(a,b),(a,c)\}\big)$, 如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

{a, b, c} 的哪些子集是可定义的?哪些二元关系是可定义的?

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ 。令 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 的论域为自然数集 \mathbb{N} ,其他的符号都按照自然的解释,则 <mark>序关系 $\{(m,n)\mid m < n\}$ 在 \mathfrak{A} 中是可定义的。(为什么?)对每一个自然数 n,单点集 $\{n\}$ 都是 \mathfrak{A} 中可定义的。(为什么?)所有素数的集合在 \mathfrak{A} 中是可定义的。(为什么?)</mark>

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ 。令 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{U} 的论域 为自然数集 \mathbb{N} , 其他的符号都按照自然的解释 , 则 \mathbf{p} $\mathbf{$

<ロ > < 回 > < 回 > < 巨 > < 巨 > 三 の 9 で

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ 。令 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 的论域为自然数集 \mathbb{N} ,其他的符号都按照自然的解释,则 <mark>序关系 $\{(m,n)\mid m < n\}$ </mark> 在 \mathfrak{A} 中是可定义的。(为什么?)对每一个自然数 n,单点集 $\{n\}$ 都是 \mathfrak{A} 中可定义的。(为什么?)所有素数的集合在 \mathfrak{A} 中是可定义的。(为什么?)

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ 。令 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{U} 的论域为自然数集 \mathbb{N} ,其他的符号都按照自然的解释,则 **序关系** $\{(m,n)\mid m < n\}$ 在 \mathfrak{U} 中是可定义的。(为什么?)对每一个自然数 n,单点集 $\{n\}$ 都是 \mathfrak{U} 中可定义的。(为什么?)所有素数的集合在 \mathfrak{U} 中是可定义的。(为什么?)

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ 。令 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 的论域为自然数集 \mathbb{N} , 其他的符号都按照自然的解释 , 则 \mathbf{p} \mathbf{f} $\mathbf{f$

定义

给定语言 \mathcal{L} 。 令 \mathcal{L} 是 \mathcal{L} 闭语句集。我们称

 $\mathsf{Mod}\, \Sigma = \big\{ \mathfrak{A} \ \big| \ \mathfrak{A} \not \in \mathcal{L} \ \texttt{结构且} \ , \ \mathfrak{A} \models \Sigma \big\}$

是 Σ 所定义的 \mathcal{L} 结构类

若 $\Sigma = \{\tau\}$, 我们记 $\{\tau\}$ 所定义的结构类为 Mod τ

定义

给定语言 \mathcal{L} 。 令 \mathcal{L} 是 \mathcal{L} 闭语句集。我们称

 $\operatorname{\mathsf{Mod}} \Sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \not \in \mathcal{L} \text{ 结构且}, \mathfrak{A} \models \Sigma\}$

是 Σ 所定义的 \mathcal{L} 结构类

若 $\Sigma = \{\tau\}$, 我们记 $\{\tau\}$ 所定义的结构类为 $\mathsf{Mod}\,\tau$

定义

给定语言 \mathcal{L} ,我们称一个 \mathcal{L} 结构类 \mathcal{K} 是 \mathcal{L} 初等类 (elementary class) ,当且仅当存在一个 \mathcal{L} 闭语句 τ 使得 $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}\, \tau$

我们称 \mathcal{K} 是 \mathcal{L} 广义初等类,当且仅当存在一个 \mathcal{L} 闭语句 集 \mathcal{L} 使得 $\mathcal{K}=\mathsf{Mod}\,\mathcal{L}$

广义初等类与初等类到底有何区别?

定义

给定语言 \mathcal{L} , 我们称一个 \mathcal{L} 结构类 \mathcal{K} 是 \mathcal{L} 初等类 (elementary class) , 当且仅当存在一个 \mathcal{L} 闭语句 τ 使得 $\mathcal{K} = \operatorname{Mod} \tau$ 我们称 \mathcal{K} 是 \mathcal{L} 广义初等类 , 当且仅当存在一个 \mathcal{L} 闭语句 集 \mathcal{L} 使得 $\mathcal{K} = \operatorname{Mod} \mathcal{L}$

广义初等类与初等类到底有何区别?

定义

给定语言 \mathcal{L} ,我们称一个 \mathcal{L} 结构类 \mathcal{K} 是 \mathcal{L} 初等类 (elementary class) ,当且仅当存在一个 \mathcal{L} 闭语句 τ 使得 $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}\,\tau$ 我们称 \mathcal{K} 是 \mathcal{L} 广义初等类 ,当且仅当存在一个 \mathcal{L} 闭语句 集 \mathcal{L} 使得 $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}\,\mathcal{L}$

广义初等类与初等类到底有何区别?

(ロ) (個) (目) (目) (目) (9)(

例

- 语句 ε₂: ∃x∃y(x ≈ y) 定义的结构类是什么?
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 \mathcal{L} 初等类?
- 所有无穷集合组成的类是不是 £ 广义初等类?是不是初等类?

例

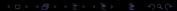
- 语句 62: ∃x∃y(x ≈ y) 定义的结构类是什么?
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 £ 初等类?

例

- 语句 62: ∃x∃y(x ≈ y) 定义的结构类是什么?
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 £ 初等类?
- 所有无穷集合组成的类是不是 £ 广义初等类?是不是初等类?

例

- 语句 62: ∃x∃y(x ≈ y) 定义的结构类是什么?
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 £ 初等类?
- 所有无穷集合组成的类是不是 £ 广义初等类?是不是初等类?



定义结构类

例

群论语言
$$\mathcal{L} = \{ \approx, \circ, ^{-1}.e \}$$
 , 则

$$\forall x \forall y \forall z \ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x \ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x \ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了群 这个初等类

阿贝尔群是不是初等类?Torsion-free 的阿贝尔群呢?

定义结构类

例

群论语言
$$\mathcal{L} = \{\approx, \circ, ^{-1}.e\}$$
,则

$$\forall x \forall y \forall z \ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x \ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x \ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了群 这个初等类

阿贝尔群是不是初等类?Torsion-free 的阿贝尔群呢?



我们给出了 可定义 的严格定义,意味着我们可以证明形如 "XXX 是不可定义的"的命题了。

定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态(homomorphism),当且仅当它满足下述条件

■ 对每个 n 元谓词符号 P , 和每组 a₁,..., a_n ∈ |刈 , 有

$$(a_1,\ldots,a_n)\in P^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow (h(a_1),\ldots,h(a_n))\in P^{\mathfrak{B}}$$



定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态(homomorphism),当且仅当它满足下述条件

■ 对每个 n 元<mark>谓词符号 P</mark>, 和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, 有

$$(a_1,\ldots,a_n)\in P^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow (h(a_1),\ldots,h(a_n))\in P^{\mathfrak{B}}$$

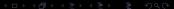


定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态(homomorphism),当且仅当它满足下述条件

■ 对每个 n 元函数符号 f, 和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, 有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n))=f^{\mathfrak{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_n))$$

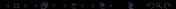


定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态(homomorphism),当且仅当它满足下述条件

■ 对每个常数符号 c, 有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$



直观上,同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么,什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢?

直观上,同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么,什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢?

定义(嵌入与同构)

上述定义下。

- 如果同态 h 是单射的 , 我们称 h 是一个从 ¾ 到 ৩
 的嵌入 (embedding);
- 如果 h 是双射(既是单射,又是满射),我们称 h 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同构 (isomorphism)。此时,我们称 \mathfrak{A} 与 \mathfrak{B} 同构 \mathfrak{A} 记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

定义(嵌入与同构)

上述定义下,

- 如果同态 h 是单射的 , 我们称 h 是一个从 ¾ 到 №
 的嵌入 (embedding);
- 如果 h 是双射(既是单射,又是满射),我们称 h 是
 一个从 组 到 ৩ 的同构(isomorphism)。此时,我们称
 组 与 ৩ 同构,记 组 ≅ ৩

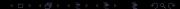
定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态 , s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- **I** 对任意项 t , $h(\overline{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 对任何不含量词且不含等词的公式 α ,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

■ 若 h 是单射,则 α 可含等词;若 h 是双射,可含量词



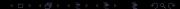
定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态 , s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- 对任意项 t , $h(\overline{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 对任何不含量词且不含等词的公式 α,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

■ 若 h 是单射,则 α 可含等词;若 h 是双射,可含量词



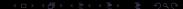
定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态 , s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- 对任意项 t , $h(\overline{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 对任何不含量词且不含等词的公式 α,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

■ 若 h 是单射 , 则 α 可含等词 ; 若 h 是双射 , 可含量词



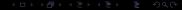
定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态 , s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- 对任意项 t , $h(\overline{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 对任何不含量词且不含等词的公式 α,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

■ 若 h 是单射 , 则 α 可含等词 ; 若 h 是双射 , 可含量词



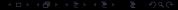
定义

如果 $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$ 是从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{A} 自身的一个同构,那么我们称 h 是 \mathfrak{A} 上的自同构 (automorphism)

推论

令 $h \in \mathbb{N}$ 上的一个自同构 , 并且 $R \subset |\mathfrak{A}|^n$ 是一个 \mathfrak{N} 中可定义的 n 元关系 , 则对任意 $|\mathfrak{A}|$ 中的元素 a_1, \ldots, a_n 有 ,

$$(a_1,\ldots,a_n)\in R\Leftrightarrow \big(h(a_1),\ldots,h(a_n)\big)\in R$$



上述定理为我们提示了一种证明"不可定义"的方法。

例

还是考虑

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 {b} 是不可定义的

上述定理为我们提示了一种证明"不可定义"的方法。

例

还是考虑

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 {b} 是不可定义的

定义

给定语言 \mathcal{L} 。我们说两个 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 与 \mathfrak{B} 初等等价 ,记 \mathfrak{A} ,当且仅当对任意 \mathcal{L} 闭语句 σ 有 ,

 $\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$

一些推论:

给定语言 \mathcal{L} 和 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B}

- lacksquare $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{V}$, 当且仅当对任意 $\mathcal L$ 初等类 $\mathcal K$ 有

 $\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$

一些推论:

给定语言 ℒ和 ℒ结构 Ⴁ和 ឞ

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, 反之未必
- lacksquare $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{V}$, 当且仅当对任意 $\mathcal L$ 初等类 $\mathcal K$ 有

 $\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$

一些推论:

给定语言 \mathcal{L} 和 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B}

- \blacksquare $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, 反之未必
- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, 当且仅当对任意 $\mathcal L$ 初等类 $\mathcal K$ 有

 $\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$

习题