前情提要

前情提要

前束范式定理

证明的难点：对公式中所含量词个数归纳

前情提要

一阶逻辑的语义

- 语言 $\mathcal{L}$ 中参数符号的语义——$\mathcal{L}$ 结构
- 自由变元的语义——赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$
- 项的语义——由 $\mathfrak{A}$ 和 s 唯一决定的 $\bar{s} : T_{\mathcal{L}} \to |\mathfrak{A}|$
- 公式的语义——满足关系

一阶逻辑的语义（续）

一阶逻辑的语义

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含（logically imply）φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和每个 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式，那么 $\mathfrak{A}$ 和 s 也满足 φ

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示满足关系和逻辑蕴涵关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$；$\alpha \vDash\dashv \beta$（逻辑等效）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$（逻辑有效）

一阶逻辑的语义

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含（logically imply）φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和每个 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式，那么 $\mathfrak{A}$ 和 s 也满足 φ

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示满足关系和逻辑蕴涵关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$；$\alpha \vDash\Dashv \beta$ （逻辑等效）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$ （逻辑有效）

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$ 赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中自由出现的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \vDash \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \vDash \varphi$

Proof.

对公式 φ 归纳

一阶逻辑的语义

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$ 赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中自由出现的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \vDash \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \vDash \varphi$

Proof.

对公式 φ 归纳

一阶逻辑的语义

约定：

- 我们用 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1, \ldots, x_n$
- 对 $\varphi(x_1, \ldots x_n)$，我们用 $\mathfrak{A} \vDash \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$，其中 $s(x_i) = d_i$（$1 \leq i \leq n$）

一阶逻辑的语义

约定：

- 我们用 $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1,\ldots,x_n$
- 对 $\varphi(x_1,\ldots x_n)$，我们用 $\mathfrak{A}\vDash\varphi[d_1,\ldots,d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A},s)\vDash\varphi$，其中 $s(x_i)=d_i$（$1\leq i\leq n$）

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \nvDash \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathfrak{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \vDash \sigma$，当且仅当 (1) 成立

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathfrak{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$，当且仅当 (1) 成立

一阶逻辑的语义

例

证明或证否下列命题：

- $\forall v_1 Qv_1 \vDash Qv_1$
- $Qv_1 \vDash \forall v_1 Qv_1$

一阶逻辑的语义

例

证明或证否下列命题：

- $\forall v_1 Q v_1 \vDash Q v_1$
- $Q v_1 \vDash \forall v_1 Q v_1$

可定义性

Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

结构内的定义性

给定语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 以及 $\mathcal{L}$ 中公式 $\varphi(x_1, \dots, x_k)$，我们称 φ 在结构 $\mathfrak{A}$ 中定义了 k-元关系

$$\left\{(a_1, \dots, a_k) \;\middle|\; \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k]\right\}$$

我们称一个 k-元关系 $R \subset |\mathfrak{A}|^k$ 是 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 中可定义的，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 公式在结构 $\mathfrak{A}$ 中定义它

结构内的定义性

给定语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 以及 $\mathcal{L}$ 中公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$，我们称 φ 在结构 $\mathfrak{A}$ 中定义了 k-元关系

$$\left\{(a_1, \ldots, a_k) \;\middle|\; \mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_k]\right\}$$

我们称一个 k-元关系 $R \subset |\mathfrak{A}|^k$ 是 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 中可定义的，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 公式在结构 $\mathfrak{A}$ 中定义它

结构内的定义性

例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，以及 $\mathcal{L}$ 结构 $\big(\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\}\big)$，如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

$\{a, b, c\}$ 的哪些子集是可定义的？哪些二元关系是可定义的？

结构内的定义性

例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，以及 $\mathcal{L}$ 结构 $\big(\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\}\big)$，如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

$\{a, b, c\}$ 的哪些子集是可定义的？哪些二元关系是可定义的？

结构内的定义性

例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，以及 $\mathcal{L}$ 结构 $\big(\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\}\big)$，如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

$\{a, b, c\}$ 的哪些子集是可定义的？哪些二元关系是可定义的？

结构内的定义性

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$。令 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 的论域为自然数集 $\mathbb{N}$，其他的符号都按照自然的解释，则序关系 $\{(m, n) \mid m < n\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的。（为什么？）对每一个自然数 n，单点集 $\{n\}$ 都是 $\mathfrak{A}$ 中可定义的。（为什么？）所有素数的集合在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的。（为什么？）

思考：不可定义的自然数的子集？能不能举出例子？

结构内的定义性

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$。令 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 的论域为自然数集 $\mathbb{N}$，其他的符号都按照自然的解释，则 序关系 $\left\{(m, n) \mid m < n\right\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的。（为什么？）对每一个自然数 n，单点集 $\{n\}$ 都是 $\mathfrak{A}$ 中可定义的。（为什么？）所有素数的集合在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的。（为什么？）

思考：不可定义的自然数的子集？能不能举出例子？

结构内的定义性

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$。令 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 的论域为自然数集 $\mathbb{N}$，其他的符号都按照自然的解释，则 序关系 $\left\{(m, n) \mid m < n\right\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的.（为什么？）对每一个自然数 n，单点集 $\{n\}$ 都是 $\mathfrak{A}$ 中可定义的.（为什么？）所有素数的集合在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的.（为什么？）

思考：不可定义的自然数的子集？能不能举出例子？

结构内的定义性

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$。令 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 的论域为自然数集 $\mathbb{N}$，其他的符号都按照自然的解释，则 序关系 $\{(m, n) \mid m < n\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的.（为什么？）对每一个自然数 n，单点集 $\{n\}$ 都是 $\mathfrak{A}$ 中可定义的.（为什么？）所有素数的集合在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的.（为什么？）

思考：不可定义的自然数的子集？能不能举出例子？

结构内的定义性

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$。令 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 的论域为自然数集 $\mathbb{N}$，其他的符号都按照自然的解释，则 序关系 $\{(m, n) \mid m < n\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的.（为什么？）对每一个自然数 n，单点集 $\{n\}$ 都是 $\mathfrak{A}$ 中可定义的.（为什么？）所有素数的集合在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的.（为什么？）

思考：不可定义的自然数的子集？能不能举出例子？

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$。令 Σ 是 $\mathcal{L}$ 闭语句集。我们称

$$\mathrm{Mod}\,\Sigma = \left\{\mathfrak{A} \,\middle|\, \mathfrak{A} \text{ 是 } \mathcal{L} \text{ 结构且，} \mathfrak{A} \models \Sigma\right\}$$

是 Σ 所定义的 $\mathcal{L}$ 结构类

若 $\Sigma = \{\tau\}$，我们记 $\{\tau\}$ 所定义的结构类为 $\mathrm{Mod}\,\tau$

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$。令 Σ 是 $\mathcal{L}$ 闭语句集。我们称

$$\mathrm{Mod}\,\Sigma = \left\{\mathfrak{A} \,\middle|\, \mathfrak{A}\text{ 是 }\mathcal{L}\text{ 结构且，}\mathfrak{A} \models \Sigma\right\}$$

是 Σ 所定义的 $\mathcal{L}$ 结构类

若 $\Sigma = \{\tau\}$，我们记 $\{\tau\}$ 所定义的结构类为 $\mathrm{Mod}\,\tau$

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$，我们称一个 $\mathcal{L}$ 结构类 $\mathcal{K}$ 是$\mathcal{L}$ 初等类（elementary class），当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句 τ 使得 $\mathcal{K} = \operatorname{Mod} \tau$

我们称 $\mathcal{K}$ 是$\mathcal{L}$ 广义初等类，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句集 Σ 使得 $\mathcal{K} = \operatorname{Mod} \Sigma$

广义初等类与初等类到底有何区别？

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$，我们称一个 $\mathcal{L}$ 结构类 $\mathcal{K}$ 是$\mathcal{L}$ 初等类（elementary class），当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句 τ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\tau$

我们称 $\mathcal{K}$ 是$\mathcal{L}$ 广义初等类，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句集 Σ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$

广义初等类与初等类到底有何区别？

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$，我们称一个 $\mathcal{L}$ 结构类 $\mathcal{K}$ 是$\mathcal{L}$ 初等类（elementary class），当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句 τ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\tau$

我们称 $\mathcal{K}$ 是$\mathcal{L}$ 广义初等类，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句集 Σ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$

广义初等类与初等类到底有何区别？

定义结构类

例

令语言 $\mathcal{L}$ 只含有等词。

- 语句 $\varepsilon_2 : \exists x \exists y (x \not\approx y)$ 定义的结构类是什么？
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 $\mathcal{L}$ 初等类？
- 所有无穷集合组成的类是不是 $\mathcal{L}$ 广义初等类？是不是初等类？

例

令语言 $\mathcal{L}$ 只含有等词。

- 语句 $\varepsilon_2 : \exists x \exists y (x \not\approx y)$ 定义的结构类是什么？
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 $\mathcal{L}$ 初等类？
- 所有无穷集合组成的类是不是 $\mathcal{L}$ 广义初等类？是不是初等类？

定义结构类

例

令语言 $\mathcal{L}$ 只含有等词。

- 语句 $\varepsilon_2 : \exists x \exists y (x \not\approx y)$ 定义的结构类是什么？
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 $\mathcal{L}$ 初等类？
- 所有无穷集合组成的类是不是 $\mathcal{L}$ 广义初等类？是不是初等类？

定义结构类

例

令语言 $\mathcal{L}$ 只含有等词。

- 语句 $\varepsilon_2 : \exists x \exists y (x \not\approx y)$ 定义的结构类是什么？
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 $\mathcal{L}$ 初等类？
- 所有无穷集合组成的类是不是 $\mathcal{L}$ 广义初等类？是不是初等类？

定义结构类

例

群论语言 $\mathcal{L} = \{\approx, \circ, ^{-1}.e\}$，则

$$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x\ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x\ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了 群 这个初等类

阿贝尔群是不是初等类？Torsion-free 的阿贝尔群呢？

定义结构类

例

群论语言 $\mathcal{L} = \{\approx, \circ, ^{-1}. e\}$，则

$$\forall x \forall y \forall z \, (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x \, (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x \, (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了 群 这个初等类

阿贝尔群是不是初等类？Torsion-free 的阿贝尔群呢？

我们给出了 可定义 的严格定义，意味着我们可以证明形如“XXX 是不可定义的”的命题了。

同态与同构

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态（homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元谓词符号 P，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \big(h(a_1), \ldots, h(a_n)\big) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态（ homomorphism ），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元谓词符号 P ，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ ，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \big(h(a_1), \ldots, h(a_n)\big) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态（homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元函数符号 f，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$h\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)\right) = f^{\mathfrak{B}}\left(h(a_1), \ldots, h(a_n)\right)$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态（homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个常数符号 c，有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢？

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢？

定义 (嵌入与同构)

上述定义下，

- 如果同态 h 是单射的，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的嵌入（embedding）；
- 如果 h 是双射（既是单射，又是满射），我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同构（isomorphism）。此时，我们称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构，记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

同态与同构

定义 (嵌入与同构)

上述定义下，

- 如果同态 h 是单射的，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的嵌入（embedding）；
- 如果 h 是双射（既是单射，又是满射），我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同构（isomorphism）。此时，我们称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构，记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h\big(\bar{s}(t)\big) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h\big(\bar{s}(t)\big) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h\big(\bar{s}(t)\big) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h\big(\bar{s}(t)\big) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定义

如果 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 自身的一个同构，那么我们称 h 是 $\mathfrak{A}$ 上的自同构（automorphism）

推论

令 h 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个自同构，并且 $R \subset |\mathfrak{A}|^n$ 是一个 $\mathfrak{A}$ 中可定义的 n 元关系，则对任意 $|\mathfrak{A}|$ 中的元素 $a_1, \ldots, a_n$ 有，

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R \Leftrightarrow \big(h(a_1), \ldots, h(a_n)\big) \in R$$

上述定理为我们提示了一种证明“不可定义”的方法。

例

还是考虑

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 $\{b\}$ 是不可定义的

上述定理为我们提示了一种证明“不可定义”的方法。

例

还是考虑

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 $\{b\}$ 是不可定义的

初等等价

定义

给定语言 $\mathcal{L}$。我们说两个 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 初等等价，记 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 闭语句 σ 有，

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \sigma$$

初等等价

一些推论：

给定语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ，反之未必
- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 初等类 $\mathcal{K}$ 有

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$$

初等等价

一些推论：

给定语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ，反之未必
- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 初等类 $\mathcal{K}$ 有

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$$

初等等价

一些推论：

给定语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ，反之未必
- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 初等类 $\mathcal{K}$ 有

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$$

习题

5.1 (1), (2), (3), (5), (7), (8), (9), (11)

5.2 (2), (3), (4)

5.3 (2)*, (3), (4), (6)