前情提要

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

承自命题逻辑的元定理：

- 演绎定理
- 重言规则
- 逆否命题
- 反证法

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

承自命题逻辑的元定理：

- 演绎定理
- 重言规则
- 逆否命题
- 反证法

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

承自命题逻辑的元定理：

- 演绎定理
- 重言规则
- 逆否命题
- 反证法

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

承自命题逻辑的元定理：

- 演绎定理
- 重言规则
- 逆否命题
- 反证法

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

一阶逻辑特色的元定理：

- 概括定理
- 常数概括定理
- 约束变元替换定理

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

一阶逻辑特色的元定理：

- 概括定理
- 常数概括定理
- 约束变元替换定理

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

一阶逻辑特色的元定理：

- 概括定理
- 常数概括定理
- 约束变元替换定理

前束范式

前束范式

定义 (量词前束公式)

我们称具有

$$Q_1x_1\dots Q_nx_n\alpha$$

形式（其中 Q_i 是 $\forall$ 或 $\exists$，且 α 不含量词）的公式为**量词前束公式**

前束范式

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α'，使得

$$\alpha \vdash\dashv \alpha'$$

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \vdash\dashv \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \vdash\dashv \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

Proof.

对公式 α 归纳证明：

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \forall x\beta$
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$

前束范式

Proof.

对公式 α 归纳证明：

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \forall x\beta$
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$

前束范式

Proof.

对公式 α 归纳证明：

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \forall x\beta$
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$

前束范式

Proof.

对公式 α 归纳证明：

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \forall x \beta$
- 若 $\alpha = \neg \beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$

一阶逻辑语言的语义

回顾命题逻辑的语义

命题逻辑的语义：

- 命题符号的语义由真值指派给出：$v : \mathfrak{S} \to \{0, 1\}$
- 命题（公式）的语义 $\bar{v} : \mathrm{WFF} \to \{0, 1\}$ 取决于命题符号的语义、命题联词（逻辑符号）的语义及其自身构造
- 而命题联词的语义体现于映射 $v \to \bar{v}$，不依赖于特定的语义解释 v

一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号：

- 常数符号
- 谓词符号
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号：

- 常数符号
- 谓词符号
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号（逻辑符号）：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号：

- 常数符号
- 谓词符号
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号（逻辑符号）：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号（参数符号）：

- 常数符号
- 谓词符号
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑的语义

需要特殊处理的符号

- 变元
  - 约束出现的变元
  - 自由出现的变元

一阶逻辑的语义

对参数符号的解释——结构

定义 (结构)

$\mathcal{L}$ 是一阶语言，一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 是一个以 $\mathcal{L}$ 中参数符号为定义域的函数并满足：

- $\mathfrak{A}(\forall)$ 是一个非空集合，记 $|\mathfrak{A}|$，称作 $\mathfrak{A}$ 的论域
- 对 n 元谓词符号 P，$\mathfrak{A}(P)$ 记作 $P^{\mathfrak{A}}$，$P^{\mathfrak{A}} \subset |\mathfrak{A}|^n$
- 对 n 元函数符号 f，$\mathfrak{A}(f)$ 记作 $f^{\mathfrak{A}}$，$f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$
- 对常数符号 c，$\mathfrak{A}(c)$ 记作 $c^{\mathfrak{A}}$，$c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$

一阶逻辑的语义

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是？

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是？

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢？

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢？

一阶逻辑的语义

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是？

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是？

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢？

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢？

一阶逻辑的语义

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是？

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是？

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢？

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢？

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是？

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是？

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢？

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢？

例

给定语言 $\mathcal{L}=\{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是？

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}|=\mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是？

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢？

$|\mathfrak{A}|=\{0,1,2,3,4,5\}$ 呢？

一阶逻辑的语义

对变元的解释——赋值

定义 (赋值)

给定语言 $\mathcal{L}$ 以及 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。我们称 s 是一个 $\mathfrak{A}$ **赋值**，当且仅当 s 是从所有变元的集合 V 到 $|\mathfrak{A}|$ 的函数 $s : V \to |\mathfrak{A}|$

对项的解释

定义 (项的赋值)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。令 s 是一个 $\mathfrak{A}$ 赋值，我们递归定义对项的解释 $\bar{s}: T \to |\mathfrak{A}|$ 如下：

- 对每个变元符号 x，$\bar{s}(x) = s(x)$；
- 对每个常数符号 c，$\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
- 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项，f 是一个 n 元函数符号，则 $\bar{s}(ft_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$

对公式的解释

定义 (满足关系)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，s 是一个 $\mathfrak{A}$ 赋值，α 是一个 $\mathcal{L}$ 公式，我们对 α 递归定义 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 α (记 $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha$) 如下

- α 是原子公式
  - $(\mathfrak{A}, s) \models t_1 \approx t_2$，当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$
  - $(\mathfrak{A}, s) \models Pt_1 \ldots t_n$，当且仅当 $\big(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)\big) \in P^{\mathfrak{A}}$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \varphi$

  其中 s_d^x 是一个新的 $|\mathfrak{A}|$ 赋值：

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s^x_d) \models \varphi$

  其中 s^x_d 是一个新的 $|\mathfrak{A}|$ 赋值：

$$s^x_d(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \neg\beta$，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\beta$，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s^x_d) \vDash \varphi$

其中 s^x_d 是一个新的 $|\mathfrak{A}|$ 赋值：

$$s^x_d(y) = \begin{cases} s(y) & 若\ y \neq x \\ d & 若\ y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \beta$，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \varphi$

  其中 s_d^x 是一个新的 $|\mathfrak{A}|$ 赋值：

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

当我们说“$(\mathfrak{A}, s) \models \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$”，我们是不是在循环定义？

- 形式上，我们只是定义了一个三元关系：$\models$，或以结构、赋值、公式为定义域的布尔值函数：$S(\mathfrak{A}, s, \alpha) = 1$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha$。这一切都可以看作是在，例如集合论语言中的工作。正如，我们在数论语言中定义“整除”关系一样。
- 我们也可以认为，该定义刻画了我们对“真”的直观。但这不仅仅是一个数学问题了

一阶逻辑的语义

当我们说"$(\mathfrak{A}, s) \vDash \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \gamma$"，我们是不是在循环定义？

- 形式上，我们只是定义了一个三元关系：$\vDash$，或以结构、赋值、公式为定义域的布尔值函数：$S(\mathfrak{A}, s, \alpha) = 1$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha$。这一切都可以看作是在，例如集合论语言中的工作。正如，我们在数论语言中定义"整除"关系一样。
- 我们也可以认为，该定义刻画了我们对"真"的直观。但这不仅仅是一个数学问题了

一阶逻辑的语义

当我们说“$(\mathfrak{A}, s) \models \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$”，我们是不是在循环定义？

- 形式上，我们只是定义了一个三元关系：$\models$，或以结构、赋值、公式为定义域的布尔值函数：$S(\mathfrak{A}, s, \alpha) = 1$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha$。这一切都可以看作是在，例如集合论语言中的工作。正如，我们在数论语言中定义“整除”关系一样。
- 我们也可以认为，该定义刻画了我们对“真”的直观。但这不仅仅是一个数学问题了

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含（ logically imply ）φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和每个 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式，那么 $\mathfrak{A}$ 和 s 也满足 φ

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示满足关系和逻辑蕴涵关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$；$\alpha \vDash\dashv \beta$ （逻辑等效）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$ （逻辑有效）

一阶逻辑的语义

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含（logically imply）φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和每个 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式，那么 $\mathfrak{A}$ 和 s 也满足 φ

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示满足关系和逻辑蕴涵关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$；$\alpha \vDash\!\dashv \beta$（逻辑等效）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$（逻辑有效）

一阶逻辑的语义

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$ 赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中自由出现的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \vDash \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \vDash \varphi$

Proof.

对公式 φ 归纳

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$ 赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中自由出现的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \vDash \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \vDash \varphi$

Proof.

对公式 φ 归纳

一阶逻辑的语义

约定：

- 我们用 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1, \ldots, x_n$
- 对 $\varphi(x_1, \ldots x_n)$，我们用 $\mathfrak{A} \vDash \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$，其中 $s(x_i) = d_i$（$1 \leq i \leq n$）

一阶逻辑的语义

约定：

- 我们用 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1, \ldots, x_n$
- 对 $\varphi(x_1, \ldots x_n)$，我们用 $\mathfrak{A} \vDash \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$，其中 $s(x_i) = d_i$ （$1 \leq i \leq n$）

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathfrak{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$，当且仅当 (1) 成立

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathfrak{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$，当且仅当 (1) 成立

习题

4.4 (1), (2)

5.1 (1), (2), (3), (5), (7), (8), (9), (11)