前情提要

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、（全称）量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、（全称）量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、（全称）量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、（全称）量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、（全称）量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

公理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (概括定理)

如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 并且 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现，那么

$$\Gamma \vdash \forall x \varphi$$

Proof.

对见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 的证明序列归纳

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (概括定理)

如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 并且 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现，那么

$$\Gamma \vdash \forall x \varphi$$

Proof.

对见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 的证明序列归纳

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (重言规则 (rule T))

如果 $\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$ 并且 $(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta)^P$ 是重言式，那么

$$\Gamma \vdash \beta$$

Proof.

$(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta)^P$ 是重言式，则 $\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta$ 是公理。运用 n 次分离规则。

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (重言规则 (rule T))

如果 $\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$ 并且 $(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta)^P$ 是重言式，那么

$$\Gamma \vdash \beta$$

Proof.

$(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta)^P$ 是重言式，则 $\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta$ 是公理。运用 n 次分离规则。

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (演绎定理)

$$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi \text{，当且仅当 } \Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$$

Proof.

与命题逻辑相同

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (演绎定理)

$$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi \text{，当且仅当 } \Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$$

Proof.

与命题逻辑相同

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

推论 (逆否命题)

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ 当且仅当 } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$$

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ 当且仅当 } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$

Proof.

由演绎定理，容易得到

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

推论 (逆否命题)

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ 当且仅当 } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$$

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ 当且仅当 } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$

Proof.

由演绎定理，容易得到

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

推论 (逆否命题)

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ 当且仅当 } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$$

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ 当且仅当 } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$

Proof.

由演绎定理，容易得到

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是**不一致的**，当且仅当存在公式 β，$\Sigma \vdash \beta$ 且 $\Sigma \vdash \neg\beta$（也即对任意公式 α 有，$\Sigma \vdash \alpha$）

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Proof.

运用演绎定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是**不一致的**，当且仅当存在公式 β，$\Sigma \vdash \beta$ 且 $\Sigma \vdash \neg\beta$（也即对任意公式 α 有，$\Sigma \vdash \alpha$）

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Proof.

运用演绎定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是不一致的，当且仅当存在公式 β，$\Sigma \vdash \beta$ 且 $\Sigma \vdash \neg\beta$（也即对任意公式 α 有，$\Sigma \vdash \alpha$）

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Proof.

运用演绎定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是不一致的，当且仅当存在公式 β，$\Sigma \vdash \beta$ 且 $\Sigma \vdash \neg\beta$（也即对任意公式 α 有，$\Sigma \vdash \alpha$）

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Proof.

运用演绎定理

“更一阶逻辑”的元定理

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$ 且推演中不出现 c

Proof.

假设 $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$，归纳证明 $\left((\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y\right)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi^c_y$

运用演绎定理得到 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$ 且推演中不出现 c

Proof.

假设 $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$，归纳证明 $\left((\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y\right)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi^c_y$

运用演绎定理得到 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$ 且推演中不出现 c

Proof.

假设 $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$，归纳证明 $\big((\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y\big)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi^c_y$

运用演绎定理得到 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$

“更一阶逻辑” 的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现，则变元 x 可以在 φ^x_y 中替换 y，并且 $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$

Proof.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi^x_c$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现，则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$，且存在一个不出现 c 的推演见证。

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现，则变元 x 可以在 φ^x_y 中替换 y，并且 $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$

Proof.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi^x_c$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现，则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$，且存在一个不出现 c 的推演见证。

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现，则变元 x 可以在 φ^x_y 中替换 y，并且 $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$

Proof.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi^x_c$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现，则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$，且存在一个不出现 c 的推演见证。

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (约束变元替换定理)

φ 是公式，t 是项，x 是变元。我们总可以找到一个公式 φ'，使得它和 φ 的区别仅在约束变元的选择，且满足

- $\varphi \vdash\dashv \varphi'$
- t 可以在 φ' 中替换 $x/$

Proof.

对 φ 归纳证明

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (约束变元替换定理)

φ 是公式，t 是项，x 是变元。我们总可以找到一个公式 φ'，使得它和 φ 的区别仅在约束变元的选择，且满足

- $\varphi \vdash\dashv \varphi'$
- t 可以在 φ' 中替换 $x/$

Proof.

对 φ 归纳证明

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x \psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 ψ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi^x_y$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y \psi^x_y$，而 $\forall y \psi^x_y \dashv\vdash \forall x \psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 ψ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$，而 $\forall y\psi_y^x \vdash\dashv \forall x\psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 ψ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$，而 $\forall y\psi_y^x \vdash\dashv \forall x\psi$

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$，(并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$，(并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

以上策略可以应付几乎所有作业，是否能应付所有情况呢？问题出在哪儿呢？

关于等词的元定理

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow Px_1 \ldots x_n \rightarrow Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \dots \to x_n \approx y_n \to Px_1 \dots x_n \to Py_1 \dots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \dots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \dots x_n \approx fy_1 \dots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to$
$Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to$
$fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

习题

4.2 (3)(a), (4), (5)(a)(d)(e)(f)

4.3 (1), (2), (4)