

前情提要

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、(全称)量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、(全称)量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、(全称)量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、(全称)量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

一阶逻辑的语言

- 逻辑符号：括号、命题联词、(全称)量词、变元
- 参数符号：等词、常数符号、谓词符号、函数符号
- 项
- 合式公式
- 自由出现、约束出现

前情提要

公理

- 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中替代 x
- $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
- $x \approx x$
- $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$, 其中 α 为原子公式, 且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中替代 x
- $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
- $x \approx x$
- $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$, 其中 α 为原子公式, 且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中替代 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
- $x \approx x$
- $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$, 其中 α 为原子公式, 且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中替代 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
- $x \approx x$
- $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$, 其中 α 为原子公式, 且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中替代 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
- 5 $x \approx x$
- 6 $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$, 其中 α 为原子公式, 且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

公理

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中替代 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
- 5 $x \approx x$
- 6 $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$, 其中 α 为原子公式, 且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (概括定理)

如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 并且 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现, 那么

$$\Gamma \vdash \forall x\varphi$$

Proof.

对见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 的证明序列归纳

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (概括定理)

如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 并且 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现, 那么

$$\Gamma \vdash \forall x\varphi$$

Proof.

对见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 的证明序列归纳

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (重言规则 (rule T))

如果 $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$ 并且 $(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$ 是重言式, 那么

$$\Gamma \vdash \beta$$

Proof.

$(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$ 是重言式, 则 $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$ 是公理。运用 n 次分离规则。

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (重言规则 (rule T))

如果 $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$ 并且 $(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$ 是重言式, 那么

$$\Gamma \vdash \beta$$

Proof.

$(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$ 是重言式, 则 $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$ 是公理。运用 n 次分离规则。

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$, 当且仅当 $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$

Proof.

与命题逻辑相同

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$, 当且仅当 $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$

Proof.

与命题逻辑相同

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

推论 (逆否命题)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$

Proof.

由演绎定理，容易得到

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

推论 (逆否命题)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$

Proof.

由演绎定理，容易得到

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

推论 (逆否命题)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$

Proof.

由演绎定理，容易得到

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是**不一致的**，当且仅当存在公式 β ， $\Sigma \vdash \beta$ 且 $\Sigma \vdash \neg\beta$ (也即对任意公式 α 有， $\Sigma \vdash \alpha$)

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Proof.

运用演绎定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是**不一致的**，当且仅当存在公式 β ， $\Sigma \vdash \beta$
且 $\Sigma \vdash \neg\beta$ (也即对任意公式 α 有， $\Sigma \vdash \alpha$)

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Proof.

运用演绎定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是**不一致的**，当且仅当存在公式 β ， $\Sigma \vdash \beta$
且 $\Sigma \vdash \neg\beta$ (也即对任意公式 α 有， $\Sigma \vdash \alpha$)

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Proof.

运用演绎定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是**不一致的**，当且仅当存在公式 β ， $\Sigma \vdash \beta$ 且 $\Sigma \vdash \neg\beta$ (也即对任意公式 α 有， $\Sigma \vdash \alpha$)

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Proof.

运用演绎定理

“高一阶逻辑”的元定理

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$, 且常数符号 c 不在 Γ 中出现 , 则存在不在 φ 中出现的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \forall y\varphi_y^c$ 且推演中不出现 c

Proof.

假设 $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$, 归纳证明 $((\alpha_0)_y^c, \dots, (\alpha_n)_y^c)$

见证 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$

运用演绎定理得到 $\Gamma \vdash \forall y\varphi_y^c$

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$, 且常数符号 c 不在 Γ 中出现 , 则存在不在 φ 中出现的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$ 且推演中不出现 c

Proof.

假设 $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$, 归纳证明 $((\alpha_0)_y^c, \dots, (\alpha_n)_y^c)$

见证 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$

运用演绎定理得到 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$, 且常数符号 c 不在 Γ 中出现 , 则存在不在 φ 中出现的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$ 且推演中不出现 c

Proof.

假设 $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$, 归纳证明 $((\alpha_0)_y^c, \dots, (\alpha_n)_y^c)$

见证 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$

运用演绎定理得到 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现, 则变元 x 可以在 φ_y^x 中替换 y , 并且 $(\varphi_y^x)_x^y = \varphi$

Proof.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi_c^x$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$, 且存在一个不出现 c 的推演见证。

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现, 则变元 x 可以在 φ_y^x 中替换 y , 并且 $(\varphi_y^x)_x^y = \varphi$

Proof.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi_c^x$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$, 且存在一个不出现 c 的推演见证。

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现, 则变元 x 可以在 φ_y^x 中替换 y , 并且 $(\varphi_y^x)_x^y = \varphi$

Proof.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi_c^x$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$, 且存在一个不出现 c 的推演见证。

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (约束变元替换定理)

φ 是公式, t 是项, x 是变元。我们总可以找到一个公式 φ' , 使得它和 φ 的区别仅在约束变元的选择, 且满足

- $\varphi \vdash \varphi'$
- t 可以在 φ' 中替换 x

Proof.

对 φ 归纳证明

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (约束变元替换定理)

φ 是公式, t 是项, x 是变元。我们总可以找到一个公式 φ' , 使得它和 φ 的区别仅在约束变元的选择, 且满足

- $\varphi \vdash \varphi'$
- t 可以在 φ' 中替换 x

Proof.

对 φ 归纳证明

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证明什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$$\vdash \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$$

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证明什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$$\vdash \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$ ，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
 - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 如果 x 在 ψ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y ，使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$ ，从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$ ，而 $\forall y\psi_y^x \vdash \forall x\psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$ ，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
 - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 如果 x 在 ψ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y ，使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$ ，从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$ ，而 $\forall y\psi_y^x \vdash \forall x\psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$, 只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
 - 如果 x 不在 Γ 中自由出现, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 如果 x 在 ψ 中自由出现, 我们找一个“全新”的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$, 从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$, 而 $\forall y\psi_y^x \vdash \forall x\psi$

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况：
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况：
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况 :
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况：
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况：
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

以上策略可以应付几乎所有作业，是否能应付所有情况呢？问题出在哪儿呢？

关于等词的元定理

关于等词的元定理

$$\text{(Eq1)} \vdash \forall x x \approx x$$

$$\text{(Eq2)} \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$\text{(Eq3)} \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$\text{(Eq4)} \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P_{x_1 \dots x_n} \rightarrow P_{y_1 \dots y_n})$$

$$\text{(Eq5)} \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f_{x_1 \dots x_n} \approx f_{y_1 \dots y_n})$$

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P_{x_1 \dots x_n} \rightarrow P_{y_1 \dots y_n})$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f_{x_1 \dots x_n} \approx f_{y_1 \dots y_n})$$

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P_{x_1 \dots x_n} \rightarrow P_{y_1 \dots y_n})$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f_{x_1 \dots x_n} \approx f_{y_1 \dots y_n})$$

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P_{x_1 \dots x_n} \rightarrow P_{y_1 \dots y_n})$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f_{x_1 \dots x_n} \approx f_{y_1 \dots y_n})$$

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P_{x_1 \dots x_n} \rightarrow P_{y_1 \dots y_n})$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f_{x_1 \dots x_n} \approx f_{y_1 \dots y_n})$$

习题

4.2 (3)(a), (4), (5)(a)(d)(e)(f)

4.3 (1), (2), (4)