前情提要

前情提要

- 我们为联词、公式赋予的语义——布尔函数
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是功能完全的

  证明：析取范式
- 推论：$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \to\}$……都是功能完全的
- 如何证明一组联词不是功能完全的？

前情提要

- 我们为联词、公式赋予的语义——布尔函数
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是功能完全的

  证明：析取范式
- 推论：$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$……都是功能完全的
- 如何证明一组联词不是功能完全的？

前情提要

- 我们为联词、公式赋予的语义——布尔函数
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是功能完全的

  证明：析取范式
- 推论：$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$……都是功能完全的
- 如何证明一组联词不是功能完全的？

前情提要

- 我们为联词、公式赋予的语义——布尔函数
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是功能完全的

  证明：析取范式
- 推论：$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \to\}$……都是功能完全的
- 如何证明一组联词不是功能完全的？

前情提要

- 我们为联词、公式赋予的语义——布尔函数
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是功能完全的

  证明：析取范式
- 推论：$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \to\}$……都是功能完全的
- 如何证明一组联词不是功能完全的？

命题逻辑希尔伯特系统的可靠性

命题逻辑的可靠性

定理 (可靠性定理)

令 Σ 是一个公式集，τ 是一个公式。那么

$$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \models \tau$$

特别地，若 $\vdash \tau$，则 $\models \tau$

命题逻辑的可靠性

定理 (可靠性定理)

令 Σ 是一个公式集，τ 是一个公式。那么

$$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \vDash \tau$$

特别地，若 $\vdash \tau$，则 $\vDash \tau$

命题逻辑的可靠性

Proof.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

Proof.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \le i \le n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

Proof.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

Proof.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

Proof.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \le i \le n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

Proof.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

Proof.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \models \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑希尔伯特系统的完全Ｉ性

命题逻辑的完全性

定理 (完全性定理)

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点：对每个符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- 窍门：证明，$\Sigma \nvdash \tau \Rightarrow \Sigma \nvDash \tau$

命题逻辑的完全性

定理 (完全性定理)

$$\Sigma \vDash \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点：对每个符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- 窍门：证明，$\Sigma \nvdash \tau \Rightarrow \Sigma \nvDash \tau$

命题逻辑的完全性

定理 (完全性定理)

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点：对每个符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- 窍门：证明，$\Sigma \nvdash \tau \Rightarrow \Sigma \not\models \tau$

命题逻辑的完全性

定义

称公式集 Σ 是不一致的（inconsistent），如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是一致的，当且仅当它不是不一致的

命题逻辑的完全性

定义

称公式集 Σ 是不一致的（inconsistent），如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是一致的，当且仅当它不是不一致的

命题逻辑的完全性

注意：

- “一致”与“不一致”都是语法性质
- “不一致”是个断言“存在证明”的性质，“一致”相反

事实：

- Σ 是不一致的，当且仅当对任意公式 β 有，$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$，当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

命题逻辑的完全性

注意：

- “一致”与“不一致”都是语法性质
- “不一致”是个断言“存在证明”的性质，“一致”相反

事实：

- Σ 是不一致的，当且仅当对任意公式 β 有，$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$，当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

命题逻辑的完全性

注意：

- “一致”与“不一致”都是语法性质
- “不一致”是个断言“存在证明”的性质，“一致”相反

事实：

- Σ 是不一致的，当且仅当对任意公式 β 有，$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$，当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

命题逻辑的完全性

注意：

- “一致”与“不一致”都是语法性质
- “不一致”是个断言“存在证明”的性质，“一致”相反

事实：

- Σ 是不一致的，当且仅当对任意公式 β 有，$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$，当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是可满足的（satisfiable），当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是不可满足的，当且仅当它不是可满足的

注意：可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是**可满足的**（satisfiable），当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是**不可满足的**，当且仅当它不是可满足的

注意：可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是可满足的（satisfiable），当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是不可满足的，当且仅当它不是可满足的

注意：可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

Proof.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

Proof.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (1)

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

Proof.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

Proof.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

所以，我们现在只需要证明

$$\Sigma \text{ 一致} \Rightarrow \Sigma \text{ 可满足}$$

即把找“推演序列”的问题转变为找“真值指派”的问题

命题逻辑的完全性

所以，我们现在只需要证明

$$\Sigma \text{ 一致} \Rightarrow \Sigma \text{ 可满足}$$

即把找“推演序列”的问题转变为找“真值指派”的问题

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派？

定义

称公式集 Δ 是极大一致的，当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派？

定义

称公式集 Δ 是极大一致的，当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派？

定义

称公式集 Δ 是极大一致的，当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

Proof.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以？）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的？

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

Proof.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以？）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的？

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

Proof.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以？）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\varDelta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\varDelta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varDelta_n$。为什么 $\varDelta$ 是一致的？极大的？

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

Proof.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以？）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的？

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

Proof.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以？）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的？

命题逻辑的完全性

我们证明了，命题逻辑的希尔伯特公理系统是完全的。我们的证明哪里体现了那些公理、推理规则是足够用的？

完全性的一个构造性证明

引理 (弱形式的完全性定理)

$$\models \alpha \;\Rightarrow\; \vdash \alpha$$

完全性的一个构造性证明

引理

假设 α 至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_k$。v 是一个真值指派。

定义

$$A_i^v = \begin{cases} A_i & \text{若 } v(A_i) = 1 \\ \neg A_i & \text{否则} \end{cases}$$

类似地，若 $\bar{v}(\alpha) = 1$，则令 $\alpha^v = \alpha$；否则，$\alpha^v = \neg\alpha$。那么就有

$$\{A_1^v, \ldots, A_k^v\} \vdash \alpha^v$$

完全性的一个构造性证明

引理

假设 α 至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_k$。v 是一个真值指派。

定义

$$A_i^v = \begin{cases} A_i & 若\ v(A_i) = 1 \\ \neg A_i & 否则 \end{cases}$$

类似地，若 $\bar{v}(\alpha) = 1$，则令 $\alpha^v = \alpha$；否则，$\alpha^v = \neg\alpha$。那么就有

$$\{A_1^v, \ldots, A_k^v\} \vdash \alpha^v$$

完全性的一个构造性证明

引理

假设 α 至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_k$。v 是一个真值指派。

定义

$$A_i^v = \begin{cases} A_i & \text{若 } v(A_i) = 1 \\ \neg A_i & \text{否则} \end{cases}$$

类似地，若 $\bar{v}(\alpha) = 1$，则令 $\alpha^v = \alpha$；否则，$\alpha^v = \neg\alpha$。那么就有

$$\{A_1^v, \ldots, A_k^v\} \vdash \alpha^v$$

完全性的一个构造性证明

Proof.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情型 1：$\bar{v}(\alpha) = 1$；情型 2：$\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情型 1：$\bar{v}(\beta) = 0$；情型 2：$\bar{v}(\gamma) = 1$；

  情型 3：$\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

Proof.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情型 1：$\bar{v}(\alpha) = 1$；情型 2：$\bar{v}(\alpha) = 0$

- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情型 1：$\bar{v}(\beta) = 0$；情型 2：$\bar{v}(\gamma) = 1$；

  情型 3：$\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

Proof.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情型 1：$\bar{v}(\alpha) = 1$；情型 2：$\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情型 1：$\bar{v}(\beta) = 0$；情型 2：$\bar{v}(\gamma) = 1$；

  情型 3：$\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

Proof.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情型 1：$\bar{v}(\alpha) = 1$；情型 2：$\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情型 1：$\bar{v}(\beta) = 0$；情型 2：$\bar{v}(\gamma) = 1$；

  情型 3：$\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

Proof.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情型 1：$\bar{v}(\alpha) = 1$；情型 2：$\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情型 1：$\bar{v}(\beta) = 0$；情型 2：$\bar{v}(\gamma) = 1$；

  情型 3：$\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

Proof.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情型 1 : $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情型 2 : $\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情型 1 : $\bar{v}(\beta) = 0$; 情型 2 : $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情型 3 : $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

Proof.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情型 1 : $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情型 2 : $\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情型 1 : $\bar{v}(\beta) = 0$; 情型 2 : $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情型 3 : $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

Proof.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情型 1：$\bar{v}(\alpha) = 1$；情型 2：$\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情型 1：$\bar{v}(\beta) = 0$；情型 2：$\bar{v}(\gamma) = 1$；

  情型 3：$\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

弱形式的完全性定理：$\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

Proof.

对任意真值指派 v，都有 $\alpha^v = \alpha$。因此有，

$$\{A_1^v, \ldots, A_k^v\} \vdash \alpha$$

特别地，考虑 v_1, v_2，除了 $v_1(A_k) = 0, v_2(A_k) = 1$，其他指派都一样……

命题逻辑的紧致性定理

定理 (紧致性定理)

公式集 Σ 是可满足的，当且仅当 Σ 的每个有穷子集是可满足的

Proof.

运用完全性定理（强形式）

命题逻辑的紧致性定理

定理 (紧致性定理)

公式集 Σ 是可满足的，当且仅当 Σ 的每个有穷子集是可满足的

Proof.

运用完全性定理（强形式）

紧致性定理的应用

定义

- 称二元组 (V, E) 是一个图（graph），当且仅当 V 是一个节点（vertice）集合，$E \subseteq V \times V$ 是节点间的连线关系，且对任意节点 v，不会有 vEv。（uEv 表示节点 u 与 v相邻）
- 称 (V_0, E_0) 是 (V, E) 的子图，当且仅当 $V_0 \subseteq V$ 且 $E_0 = E \cap (V_0 \times V_0)$

紧致性定理的应用

推论

如果一个图（可能是可数无穷的）的每个有穷子图都能用四种颜色染色且不会造成相邻节点染成同一种颜色，那么这整个图都能用四种颜色染色

习题

2.8 (4), (5), (8)