前情提要

前情提要

命题逻辑的希尔伯特系统

- 公理：(A1)、(A2)、(A3)，3组
- 推理规则：分离规则
- 推演：$\Gamma \vdash \alpha$、$\vdash \alpha$

前情提要

关于这个系统的元定理：

下述公式是该系统的内定理

- $\alpha \to \alpha$
- $\neg\neg\beta \to \beta$
- $\beta \to \neg\neg\beta$
- $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
- $(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta) \to \beta$
- $\alpha \to \neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)$

其中，α,β 是任意公式

前情提要

关于这个系统的元定理：

- $\Gamma \vdash \alpha$，则存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$
- 演绎定理：$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$

  证明：把每个符合条件的证明，改造成我们需要的证明。通过对证明的长度归纳，来证明每个证明都可以被改造。

前情提要

关于这个系统的元定理：

- $\Gamma \vdash \alpha$，则存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$
- 演绎定理：$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$

  证明：把每个符合条件的证明，改造成我们需要的证明。通过对证明的长度归纳，来证明每个证明都可以被改造。

前情提要

真值指派

- 对命题符号的解释：$v : \mathfrak{S} \to \{0, 1\}$
- 对命题联词的解释：每个对命题符号的真值指派 v 可以唯一地扩张为对所有合式公式的真值指派

$$\bar{v} : WFF \to \{0, 1\}$$

这又是一个递归的定义

前情提要

真值指派

- 对命题符号的解释：$v : \mathfrak{S} \to \{0, 1\}$
- 对命题联词的解释：每个对命题符号的真值指派 v 可以唯一地扩张为对所有合式公式的真值指派

$$\bar{v} : WFF \to \{0, 1\}$$

这又是一个递归的定义

命题联词

我们对诸命题联词的语义解释，就体现在对“如何从 v 得到 $\bar{v}$”的定义。

例如：

$$\bar{v}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & 若\ \bar{v}(\alpha) = 1\ 并且\ \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & 否则 \end{cases}$$

命题联词

我们对诸命题联词的语义解释，就体现在对“如何从 v 得到 $\bar{v}$”的定义。

例如：

$$\bar{v}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

命题联词

或用真值表表示：

$\bar{v}(\alpha)$	$\bar{v}(\beta)$	$\bar{v}(\alpha \to \beta)$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

命题联词

或用真值表表示：

x	y	$B_{\rightarrow}(x,y)$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

命题联词

因此，我们赋予二元联词 $\to$ 的意义就是一个二元函数：

$$B_{\to} : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

而赋予一元联词 $\neg$ 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg} : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

我们称这种以 $\{0,1\}$（或其卡氏积）为定义域和值域的函数为布尔函数

命题联词

因此，我们赋予二元联词 $\rightarrow$ 的意义就是一个二元函数：

$$B_{\rightarrow} : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

而赋予一元联词 $\neg$ 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

我们称这种以 $\{0,1\}$（或其卡氏积）为定义域和值域的函数为布尔函数

命题联词

因此，我们赋予二元联词 $\to$ 的意义就是一个二元函数：

$$B_{\to} : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

而赋予一元联词 $\neg$ 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg} : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

我们称这种以 $\{0,1\}$（或其卡氏积）为定义域和值域的函数为布尔函数

命题联词

问题：

- 有多少种一元联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题：

- 有多少种不同意义的一元联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题：

- 有多少种一元布尔函数？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题：

- 有多少种一元联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题：

- 有多少种一元联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

命题联词的合成

x	y	$B_\neg(x)$	$B_\vee(x,y)$	$B_\top(x)$	$B_\downarrow(x,y)$
1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0		1		0
0	0		0		1

则 $B_\top(x) = B_\vee(B_\neg(x), x)$，而 $B_\downarrow(x,y) = B_\neg(B_\vee(x,y))$

命题联词

假设 α 是一个至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_n$ 的合式公式，那么 α 就定义了一个 n 元布尔函数 $B_\alpha^n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$v(A_1), \ldots, v(A_n)$		$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(A_1), \ldots, v_1(A_n)$	$= 1, \ldots, 1$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$v_{2^n}(A_1), \ldots, v_{2^n}(A_n)$	$= 0, \ldots, 0$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

所以，α 在意义上等同于 $\star(A_1, \ldots, A_n)$，其中 $\star$ 是某个 n 元命题联词。

命题联词

假设 α 是一个至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_n$ 的合式公式，那么 α 就定义了一个 n 元布尔函数 $B_\alpha^n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$l

$v(A_1), \ldots, v(A_n)$	$x_1, \ldots, x_n$	$B_\alpha^n(x_1, \ldots, x_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(A_1), \ldots, v_1(A_n)$	$= 1, \ldots, 1$	$B_\alpha^n(1, \ldots, 1) =$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$v_{2^n}(A_1), \ldots, v_{2^n}(A_n)$	$= 0, \ldots, 0$	$B_\alpha^n(0, \ldots, 0) =$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

所以，α 在意义上等同于 $\star(A_1, \ldots, A_n)$，其中 $\star$ 是某个 n 元命题联词。

命题联词

假设 α 是一个至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_n$ 的合式公式，那么 α 就定义了一个 n 元布尔函数 $B_\alpha^n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$v(A_1), \ldots, v(A_n)$	$x_1, \ldots, x_n$	$B_\alpha^n(x_1, \ldots, x_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(A_1), \ldots, v_1(A_n)$	$= 1, \ldots, 1$	$B_\alpha^n(1, \ldots, 1) =$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$v_{2^n}(A_1), \ldots, v_{2^n}(A_n)$	$= 0, \ldots, 0$	$B_\alpha^n(0, \ldots, 0) =$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

所以，α 在意义上等同于 $\star(A_1, \ldots, A_n)$，其中 $\star$ 是某个 n 元命题联词。

命题联词

问题：是否对每个 n 元命题联词，我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式？即 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 是否够用？也即，是否只用 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、$B_{\vee}$、$B_{\rightarrow}$ 和 $B_{\leftrightarrow}$ 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数？

命题联词

问题：是否对每个 n 元命题联词，我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式？即 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$ 和 $\leftrightarrow$ 是否够用？也即，是否只用 $B_\neg$、$B_\wedge$、$B_\vee$、$B_\to$ 和 $B_\leftrightarrow$ 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数？

命题联词

问题：是否对每个 n 元命题联词，我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式？即 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 是否够用？也即，是否只用 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、$B_{\vee}$、$B_{\rightarrow}$ 和 $B_{\leftrightarrow}$ 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数？

定理

对任意 n 元布尔函数 $G:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$（$n \geq 1$），都存在一个命题逻辑合式公式 α，使得 $B_\alpha^n = G$

命题联词

例：

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\begin{aligned}\alpha = \; & (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)\end{aligned}$$

检验：$M = B_\alpha^3$

命题联词

例：

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\begin{aligned}\alpha = \quad & (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)\end{aligned}$$

检验：$M = B_\alpha^3$

命题联词

例：

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\begin{aligned}\alpha = \quad & (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)\end{aligned}$$

检验：$M = B_\alpha^3$

Proof.

撰写对一般情况的证明

定义

称一组联词（布尔函数）C 是功能完全的，如果任意 n 元布尔函数（$n \geq 1$）都可以由 C 中的布尔函数通过函数复合定义。

例：

- $\{B_{\neg}, B_{\wedge}, B_{\vee}\}$，由上述证明（为什么？）
- $\{B_{\neg}, B_{\wedge}\}$，因为 $B_{\vee}(x, y) = B_{\neg}\Big(B_{\wedge}\big(B_{\neg}(x), B_{\neg}(y)\big)\Big)$

  …

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例：$\{B_\wedge, B_\to\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例：$\{B_\wedge, B_\rightarrow\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、或 $B_{\vee}$
- 寻找，例如 $B_{\neg}$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例：$\{B_{\wedge}, B_{\rightarrow}\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例：$\{B_\wedge, B_\to\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、或 $B_{\vee}$
- 寻找，例如 $B_{\neg}$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例：$\{B_{\wedge}, B_{\rightarrow}\}$

命题逻辑的语义（续）

定义

- 称一个真值指派 v 满足一个公式 α，如果 $\bar{v}(\alpha) = 1$
- 称一个公式集 Σ 重言蕴含公式 τ（$\Sigma \vDash \tau$），若每个满足 Σ 中所有公式的真值指派也满足 τ
- 称一个公式 τ 是 重言式，当且仅当 $\emptyset \vDash \tau$（又记 $\vDash \tau$）
- 称公式 σ 和 τ 重言等价，当且仅当 $\{\sigma\} \vDash \tau$（又记 $\sigma \vDash \tau$）且 $\tau \vDash \sigma$

命题逻辑的语义（续）

定义

- 称一个真值指派 v 满足一个公式 α，如果 $\bar{v}(\alpha) = 1$
- 称一个公式集 Σ 重言蕴含公式 τ（$\Sigma \vDash \tau$），若每个满足 Σ 中所有公式的真值指派也满足 τ
- 称一个公式 τ 是 重言式，当且仅当 $\emptyset \vDash \tau$（又记 $\vDash \tau$）
- 称公式 σ 和 τ 重言等价，当且仅当 $\{\sigma\} \vDash \tau$（又记 $\sigma \vDash \tau$）且 $\tau \vDash \sigma$

命题逻辑的语义（续）

定义

- 称一个真值指派 v 满足一个公式 α，如果 $\bar{v}(\alpha) = 1$
- 称一个公式集 Σ 重言蕴含公式 τ（$\Sigma \models \tau$），若每个满足 Σ 中所有公式的真值指派也满足 τ
- 称一个公式 τ 是 重言式，当且仅当 $\emptyset \models \tau$（又记 $\models \tau$）
- 称公式 σ 和 τ 重言等价，当且仅当 $\{\sigma\} \models \tau$（又记 $\sigma \models \tau$）且 $\tau \models \sigma$

命题逻辑的语义（续）

定义

- 称一个真值指派 v **满足**一个公式 α，如果 $\bar{v}(\alpha) = 1$
- 称一个公式集 Σ **重言蕴含**公式 τ（$\Sigma \vDash \tau$），若每个满足 Σ 中所有公式的真值指派也满足 τ
- 称一个公式 τ 是 **重言式**，当且仅当 $\emptyset \vDash \tau$（又记 $\vDash \tau$）
- 称公式 σ 和 τ **重言等价**，当且仅当 $\{\sigma\} \vDash \tau$（又记 $\sigma \vDash \tau$）且 $\tau \vDash \sigma$

命题逻辑的语义（续）

容易验证

- 公式 α（至多含 $A_1, \ldots, A_n$）是重言式，当且仅当 B_α^n 是值为 1 的常函数
- 公式 σ 和 τ（至多含 $A_1, \ldots, A_n$）重言等价，当且仅当

$$B_\sigma^n = B_\tau^n$$

习题

3. (2)、(3)(b)-(d)、(4)、(5)、(10)
5. (2)、(5)、(7)*