前情提要

前情提要

命题逻辑的语言

- 符号
  - 命题符号：$A_0, A_1, A_2, \ldots$
  - 联词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

    （一元联词与二元联词的区别体现在合式公式定义中）
  - 括号：$(,)$

前情提要

命题逻辑的语言

- 符号
  - 命题符号：$A_0, A_1, A_2, \ldots$
  - 联词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

    （一元联词与二元联词的区别体现在合式公式定义中）
  - 括号：$(,)$

前情提要

命题逻辑的语言

- 合式公式
  - 每个命题符号 A_i 都是合式公式
  - 若 α, β 是合式公式，那么

    $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是合式公式
  - 除此以外都不是合式公式

前情提要

注意

- 元语言与对象语言
- 递归定义不是循环定义
  - 自下而上：告诉我们构造的过程
  - 自上而下：可以使用归纳法

前情提要

注意

- 元语言与对象语言
- 递归定义不是循环定义
  - 自下而上：告诉我们构造的过程
  - 自上而下：可以使用归纳法

前情提要

注意

- 元语言与对象语言
- 递归定义不是循环定义
  - 自下而上：告诉我们构造的过程
  - 自上而下：可以使用归纳法

前情提要

注意

- 元语言与对象语言
- 递归定义不是循环定义
  - 自下而上：告诉我们构造的过程
  - 自上而下：可以使用归纳法

前情提要

运用归纳法证明

- 范例：唯一可读性
- 所证命题的形式：所有公式 α，满足性质 P
- 关键：明确性质 P

前情提要

运用归纳法证明

- 范例：唯一可读性
- 所证命题的形式：所有公式 α，满足性质 P
- 关键：明确性质 P

前情提要

运用归纳法证明

- 范例：唯一可读性
- 所证命题的形式：所有公式 α，满足性质 P
- 关键：明确性质 P

经典命题逻辑的希尔伯特系统

真即被证明

——数学直觉主义

什么是证明

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- α, β, γ 是元语言符号，指代任一合式公式

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- α, β, γ 是元语言符号，指代任一合式公式

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- 因此，有无穷条公理。

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- 但我们能机械地判定一个表达式是不是公理（why?）

希尔伯特系统的推理规则

分离规则（*modus ponens*,MP）：

从 $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ 可以推出 β

为强调它是纯形式的规则，又称之为变形规则。

希尔伯特系统的推理规则

分离规则（*modus ponens*,MP）：

从 $\alpha, \alpha \to \beta$ 可以推出 β

为强调它是纯形式的规则，又称之为变形规则。

希尔伯特系统的证明

定义 (推演/证明/演绎（deduction）)

从公式集 Γ 到公式 φ 的一个推演（或证明或演绎）是一个有穷的公式序列 $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 满足 $\alpha_n = \varphi$ 并且对所有 $i \leq n$ 或者

(a) α_i 属于 $\Gamma \cup \Lambda$；或者

(b) 存在 $j, k < i$, 使得 $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个定理（记$\Gamma \vdash \alpha$），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个**定理**（记$\Gamma \vdash \alpha$），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个定理（记$\Gamma \vdash \alpha$），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个**定理**（记$\Gamma \vdash \alpha$），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

Proof.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

Proof.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

Proof.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

Proof.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

Proof.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

Proof.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

Proof.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Proof.

把已有的推演改造成我想要的推演

$(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Proof.

把已有的推演改造成我想要的推演

$(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Proof.

把已有的推演改造成我想要的推演

$(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Proof.

把已有的推演改造成我想要的推演

($\Leftarrow$)

($\Rightarrow$)

命题逻辑的语义

命题逻辑的语义

命题逻辑中，命题是语义的最小载体。且经典命题逻辑只关心“真”、“假”

定义 (真值指派)

我们说 v 是一个真值指派，当且仅当 v 是以由命题符号组成的集合 $\mathfrak{S}$ 为定义域、以真值集合 $\{0,1\}$ 为值域的函数

$v : \mathfrak{S} \to \{0,1\}$

命题逻辑的语义

命题逻辑中，命题是语义的最小载体。且经典命题逻辑只关心“真”、“假”

定义 (真值指派)

我们说 v 是一个**真值指派**，当且仅当 v 是以由命题符号组成的集合 $\mathfrak{S}$ 为定义域、以**真值**集合 $\{0,1\}$ 为值域的函数

$v: \mathfrak{S} \to \{0,1\}$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现？

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathrm{WFF} \to \{0,1\}$：

0. 对 $A \in \mathfrak{S}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β，

$$\bar{v}(\neg\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现？

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathrm{WFF} \to \{0,1\}$：

0. 对 $A \in \mathfrak{S}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β，

$$\bar{v}(\neg\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现？

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathrm{WFF} \to \{0,1\}$：

0. 对 $A \in \mathfrak{S}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β，

$$\bar{v}(\neg\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现？

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathrm{WFF} \to \{0,1\}$：

0. 对 $A \in \mathfrak{S}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α,β，

$$\bar{v}(\neg\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现？

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathrm{WFF} \to \{0,1\}$：

0. 对 $A \in \mathfrak{S}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β，

$$\bar{v}(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现？

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathrm{WFF} \to \{0, 1\}$：

0. 对 $A \in \mathfrak{S}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β，

$$\bar{v}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 或者 } \bar{v}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现？

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathrm{WFF} \to \{0, 1\}$：

0. 对 $A \in \mathfrak{S}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β，

$$\bar{v}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现？

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathrm{WFF} \to \{0,1\}$：

0. 对 $A \in \mathfrak{S}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β，

$$\bar{v}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta) \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

注意：

- 对 $\bar{v}$ 的定义是一个递归定义
  - 它告诉我们，给定一个真值指派，如何计算一个具体公式的真值

    例
  - 我们可以用归纳法证明，给定真值指派 v，对任意公式 α，$\bar{v}(\alpha)$ 满足某个性质

命题逻辑的语义

注意：

- 对 $\bar{v}$ 的定义是一个递归定义
  - 它告诉我们，给定一个真值指派，如何计算一个具体公式的真值

    例

  - 我们可以用归纳法证明，给定真值指派 v，对任意公式 α，$\bar{v}(\alpha)$ 满足某个性质

命题逻辑的语义

注意：

- 对 $\bar{v}$ 的定义是一个递归定义
  - 它告诉我们，给定一个真值指派，如何计算一个具体公式的真值

    例
  - 我们可以用归纳法证明，给定真值指派 v，对任意公式 α，$\bar{v}(\alpha)$ 满足某个性质