前情提要

前情提要

有关哲学

- 逻辑推理的特征是保真
- 逻辑学是关于真的，研究的是真与真之间的规律
- 逻辑本身能提供的新知识有限。哪些是逻辑真？

前情提要

有关哲学

- 逻辑推理的特征是保真
- 逻辑学是关于真的，研究的是真与真之间的规律
- 逻辑本身能提供的新知识有限。哪些是逻辑真？

前情提要

有关哲学

- 逻辑推理的特征是保真
- 逻辑学是关于真的，研究的是真与真之间的规律
- 逻辑本身能提供的新知识有限。哪些是逻辑真？

前情提要

逻辑学、数学、集合论

- 数理逻辑刻画的是数学真之规律
- 公理集合论被认为是数学的基础，本身又是一种一阶逻辑理论
- 逻辑学是数学的一个分支，逻辑学有关定理是数学定理，因而可以被看作是集合论的内定理

前情提要

逻辑学、数学、集合论

- 数理逻辑刻画的是数学真之规律
- 公理集合论被认为是数学的基础，本身又是一种一阶逻辑理论
- 逻辑学是数学的一个分支，逻辑学有关定理是数学定理，因而可以被看作是集合论的内定理

前情提要

逻辑学、数学、集合论

- 数理逻辑刻画的是数学真之规律
- 公理集合论被认为是数学的基础，本身又是一种一阶逻辑理论
- 逻辑学是数学的一个分支，逻辑学有关定理是数学定理，因而可以被看作是集合论的内定理

前情提要

课程内容

- 一阶谓词逻辑的语法
- 一阶谓词逻辑的语义
- 一阶谓词逻辑的可靠性与完全性

前情提要

课程内容

- 一阶谓词逻辑的语法
- 一阶谓词逻辑的语义
- 一阶谓词逻辑的可靠性与完全性

前情提要

课程内容

- 一阶谓词逻辑的语法
- 一阶谓词逻辑的语义
- 一阶谓词逻辑的可靠性与完全性

命题逻辑

命题逻辑

回顾：我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非A”和“A并且B”的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑

回顾：我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非A”和“A并且B”的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑

回顾：我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非A”和“A并且B”的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑

回顾：我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非A”和“A并且B”的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑

回顾：我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非A”和“A并且B”的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑

回顾：我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非A”和“A并且B”的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑的语言

语言的基本构件：符号

- 可数多个命题符号：$A_0, A_1, A_2, \ldots$
- 联词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots$
- 括号：$(,)$

注意：符号是任意指定的数学对象，可以是某些自然数或集合，只需要满足一些条件（以便不产生混淆），本身没有任何意义。

命题逻辑的语言

语言的基本构件：符号

- 可数多个命题符号：$A_0, A_1, A_2, \ldots$
- 联词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots$
- 括号：$(,)$

注意：符号是任意指定的数学对象，可以是某些自然数或集合，只需要满足一些条件（以便不产生混淆），本身没有任何意义。

命题逻辑的语言

定义 (表达式（ expression ）)

我们称由命题逻辑符号组成的有穷长度的符号串为命题逻辑语言的表达式

注意：

- 我们要求命题逻辑符号彼此不同，且任意一个符号也不同于若干符号组成的有穷符号串
- 不是所有表达式都能构成合乎语法规则的命题

命题逻辑的语言

定义 (合式公式（well founded formula）)

- 每个命题符号 A_i 都是合式公式
- 若 α, β 是合式公式，那么

  $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是合式公式
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

关于合式公式的定义

- 元语言与对象语言
- 上述定义是一种递归定义

命题逻辑的语言

递归定义

- 递归定义不是循环定义
  - 自上而下

    $C^* = \bigcap \left\{ X \,\middle|\, X \text{ 包涵所有命题变元且在复合命题构造下封闭} \right\}$
  - 自下而上
    - $C_0 = \{A_0, A_1, \ldots\}$
    - $C_{n+1} = C_n \cup \left\{ (\neg\alpha) \,\middle|\, \alpha \in C_n \right\} \cup \left\{ (\alpha \star \beta) \,\middle|\, \alpha, \beta \in C_n \right\}$
    - $C_* = \bigcup_n C_n$

命题逻辑的语言

递归定义

- 递归定义不是循环定义
  - 自上而下

    $C^* = \bigcap \{X \mid X \text{ 包涵所有命题变元且在复合命题构造下封闭}\}$

  - 自下而上
    - $C_0 = \{A_0, A_1, \ldots\}$
    - $C_{n+1} = C_n \cup \{(\neg\alpha) \mid \alpha \in C_n\} \cup \{(\alpha \star \beta) \mid \alpha, \beta \in C_n\}$
    - $C_* = \bigcup_n C_n$

命题逻辑的语言

递归定义

- 递归定义不是循环定义
  - 自上而下

    $C^* = \bigcap \left\{ X \,\middle|\, X \text{ 包涵所有命题变元且在复合命题构造下封闭} \right\}$
  - 自下而上
    - $C_0 = \{A_0, A_1, \ldots\}$
    - $C_{n+1} = C_n \cup \left\{ (\neg\alpha) \,\middle|\, \alpha \in C_n \right\} \cup \left\{ (\alpha \star \beta) \,\middle|\, \alpha, \beta \in C_n \right\}$
    - $C_* = \bigcup_n C_n$

命题逻辑的语言

递归定义

- $C^* = C_*$ (EXE)
- 自下而上定义的好处在于展现了每个合式公式的构造过程
- 自上而下的定义告诉我们可以运用归纳原理

命题逻辑的语言

当我们要证明诸如“所有合式公式都有某性质”时，我们往往要运用：

定理 (关于命题逻辑合式公式的归纳原理)

令 P 是一个关于合适公式的性质。若下述 *(1)*、*(2)* 成立，则所有合适公式 α 都有 P 性质，记 $P(\alpha)$

- 对所有命题符号 A_i，$P(A_i)$
- 对所有合式公式 α,β，若 $P(\alpha)$ 且 $P(\beta)$，则 $P((\neg\alpha))$ 且 $P(\alpha \star \beta)$（注：$\star$ 可以是 $\vee, \wedge, \rightarrow$ 或 $\leftrightarrow$）

命题逻辑的语言

关于命题逻辑合式公式的归纳原理（定理）来源于自然数上的归纳原理。有两种等价（EXE*）的表述：

- $P(0) \to \forall n\big(P(n) \to P(Sn)\big) \to \forall n P(n)$
- $\forall n\big(\forall m < n P(m) \to P(n)\big) \to \forall n P(n)$

取自然数的性质 P' 为：$P'(n)$，当且仅当所有 C_n 中的公式 α 有 $P(\alpha)$，关于合式公式的归纳原理就成了自然数上的归纳原理的一个特例。

注意：$C^* = C_*$ 的证明中是否要用到自然数上的归纳原理？

归纳原理的一个应用

定理

每个合式公式中左右括号的数目相同。且每一合式公式真前段中左括号多于右括号。因此，合式公式的真前段一定不是合式公式。

Proof.

归纳原理的一个应用

定理

每个合式公式中左右括号的数目相同。且每一合式公式真前段中左括号多于右括号。因此，合式公式的真前段一定不是合式公式。

Proof.

命题逻辑的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 *(2)* 和 *(3)* 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 *(2)* 和 *(3)* 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 *(2)* 和 *(3)* 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 *(2)* 和 *(3)* 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。