上课之前

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

上课之前

杨睿之
yangruizhi@fudan.edu.cn

上课之前

logic.fudan.edu.cn

上课之前

助教

习题课安排

考核方式

上课之前

我们会录制视频

数理逻辑 I

Mathematical Logic I

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2014 年秋

什么是逻辑？

推理？

所有推理都是逻辑的吗？

例 1：亚里士多德三段论

人 是 自私的

孔子 是 人

孔子 是 自私的

例 1：亚里士多德三段论

人	是	自私的
孔子	是	人
孔子	是	自私的

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：| 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：I 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：I 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：I 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：| 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：I 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：I 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：I 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：I 二号内存条是元凶！

例 II：蓝屏

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：I 二号内存条是元凶！

以上两则推理都是逻辑吗？有什么区别？

逻辑推理必须是保真的（truth-preserving）

本课程的哲学前提

我们不接受彻底的怀疑论

本课程的哲学前提

我们不接受彻底的怀疑论

本课程的哲学前提

高尔吉亚（Gorgias）：

- 没有东西存在；
- 就算有东西存在，也无法认识它；
- 就算能认识它，也无法与他人谈论它；
- 就算能谈论它，也无法互相理解。

这个我们不能接受

本课程的哲学前提

高尔吉亚（Gorgias）：

- 没有东西存在；
- 就算有东西存在，也无法认识它；
- 就算能认识它，也无法与他人谈论它；
- 就算能谈论它，也无法互相理解。

这个我们不能接受

本课程的哲学前提

苏格拉底（Socrates）：

- 辩论是为了寻找**真**
- 就算被驳倒了也可能有所收获——**真**

本课程的哲学前提

苏格拉底（Socrates）：

- 辩论是为了寻找**真**
- 就算被驳倒了也可能有所收获——真

本课程的哲学前提

苏格拉底（Socrates）：

- 辩论是为了寻找真
- 就算被驳倒了也可能有所收获——真

本课程的哲学前提

我们能够接受的程度：

- 黑客帝国
- 缸中脑
- 物理主义（抽象实体不存在）

……

本课程的哲学前提

我们能够接受的程度：

- 黑客帝国
- 缸中脑
- 物理主义（抽象实体不存在）

……

本课程的哲学前提

我们能够接受的程度：

- 黑客帝国
- 缸中脑
- 物理主义（抽象实体不存在）

……

本课程的哲学前提

我们预设：

在一些情况下，我们可以谈论真（Truth）

逻辑学不是论辩术、或修辞学

逻辑学是关于真的

逻辑学不是论辩术、或修辞学

逻辑学是关于**真**的

下述预设大概没什么问题：

- 如果我们可以有意义地谈论命题 P 和 Q 是否为真，那么我们也可以有意义地谈论“并非P”、“P并且Q”等等是否为真。
- 如果我们可以谈论，某个人，例如“苏格拉底会死”是否为真，那么我们也可以有意义地谈论“所有人都会死”或“存在一个不会死的人”是否为真。

下述预设大概没什么问题：

- 如果我们可以有意义地谈论命题 P 和 Q 是否为真，那么我们也可以有意义地谈论“并非P”、“P并且Q”等等是否为真。
- 如果我们可以谈论，某个人，例如“苏格拉底会死”是否为真，那么我们也可以有意义地谈论“所有人都会死”或“存在一个不会死的人”是否为真。

到底可以谈论哪些真假？

- 天鹅大概都是白的
- 卷福是秃子

我们常常会难以严格地谈论一个自然语言命题的真假

到底可以谈论哪些真假？

- 天鹅大概都是白的
- 卷福是秃子

我们常常会难以严格地谈论一个自然语言命题的真假

到底可以谈论哪些真假？

- 天鹅大概都是白的
- 卷福是秃子

我们常常会难以严格地谈论一个自然语言命题的真假

到底可以谈论哪些真假？

- 天鹅大概都是白的
- 卷福是秃子

我们常常会难以严格地谈论一个自然语言命题的真假

谈论一个数学命题的真假似乎没什么问题

例如：

- $5+7=12$
- 存在任意大的素数
- $2^0+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n}+\cdots=3$
- 存在一个不可数的实数集合，其元素的个数比由所有实数组成的集合的严格地少。

谈论一个数学命题的真假似乎没什么问题

例如：

- $5+7=12$
- 存在任意大的素数
- $2^0+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n}+\cdots=3$
- 存在一个不可数的实数集合，其元素的个数比由所有实数组成的集合的严格地少。

谈论一个数学命题的真假似乎没什么问题

例如：

- $5+7=12$
- 存在任意大的素数
- $2^0+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n}+\cdots=3$
- 存在一个不可数的实数集合，其元素的个数比由所有实数组成的集合的严格地少。

谈论一个数学命题的真假似乎没什么问题

例如：

- $5 + 7 = 12$
- 存在任意大的素数
- $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} + \cdots = 3$
- 存在一个不可数的实数集合，其元素的个数比由所有实数组成的集合的严格地少。

而以现代的标准，在弗雷格（Frege）1879 年《概念文字》（*Begriffsschrift*）出版以前（尽管数学已非常发达），许多数学命题尚没有严格的表述，许多数学证明也都不是严格有效的。

本课程中

逻辑 = 数理逻辑（mathematical logic） = ？

而以现代的标准，在弗雷格（Frege）1879 年《概念文字》（*Begriffsschrift*）出版以前（尽管数学已非常发达），许多数学命题尚没有严格的表述，许多数学证明也都不是严格有效的。

本课程中

$$\text{逻辑} = \text{数理逻辑（mathematical logic）} = ?$$

而以现代的标准，在弗雷格（Frege）1879 年《概念文字》（*Begriffsschrift*）出版以前（尽管数学已非常发达），许多数学命题尚没有严格的表述，许多数学证明也都不是严格有效的。

本课程中

$$\text{逻辑} = \text{数理逻辑（mathematical logic）} = ?$$

这门课到底教些什么，学些什么？

我们认为，所有人都先天具备逻辑思考的能力

那我们又能从这门课学到什么？

逻辑学是否提供新知识？

培根（Francis Bacon）：亚里士多德《工具论》中的那些纯演绎的方法（三段论）不足以发现科学真理，因此需要《新工具》（*Novum Organum Scientiarum*）

康德（Immanuel Kant）：分析命题（主项包含谓项）不提供新知识，后天综合命题讲述经验世界的知识，而哲学、数学知识应该是先天综合命题。

逻辑学是否提供新知识？

培根（Francis Bacon）：亚里士多德《工具论》中的那些纯演绎的方法（三段论）不足以发现科学真理，因此需要《新工具》（*Novum Organum Scientiarum*）

康德（Immanuel Kant）：分析命题（主项包含谓项）不提供新知识，后天综合命题讲述经验世界的知识，而哲学、数学知识应该是先天综合命题。

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？

  什么是逻辑推理？——证明

- 分析命题不包含知识？

  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？

- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？

  什么是逻辑推理？——证明

- 分析命题不包含知识？

  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？

- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？
  什么是逻辑推理？——证明
- 分析命题不包含知识？
  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？
- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？
  什么是逻辑推理？——证明
- 分析命题不包含知识？
  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？
- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？

  什么是逻辑推理？——证明

- 分析命题不包含知识？

  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？

- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？
  什么是逻辑推理？——证明
- 分析命题不包含知识？
  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？
- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？

  什么是逻辑推理？——证明

- 分析命题不包含知识？

  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？

- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？

  什么是逻辑推理？——证明

- 分析命题不包含知识？

  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？

- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

逻辑学是否提供新知识？

我们在本学期中需要厘清的问题

- 逻辑推理不能提供新知识？

  什么是逻辑推理？——证明

- 分析命题不包含知识？

  什么是分析命题？——逻辑有效式？数学真理？

- 什么是逻辑学（数理逻辑）？

这门课的内容

- 一阶（谓词）逻辑（first-order predicate logic）
  - 一阶逻辑的语义（semantic）
  - 一阶逻辑的语法（syntax）
  - 语法相对于语义的可靠性（soundness）与完全性（completeness）

这门课的内容

逻辑的语义：对真的基于结构刻画

例：

我们说，$\alpha \to \beta$ 为真，当且仅当 α 为假或者 β 为真。

这门课的内容

逻辑的语义：对真的基于结构刻画

例：

我们说，$\alpha \to \beta$ 为真，当且仅当 α 为假或者 β 为真。

这门课的内容

逻辑的**语法**：对**真**的基于**规则**的刻画

* 我们除了希望这样一套规则正确地刻画了真，还希望它能够被机械地运用（编成一个程序让计算机自动运行）。

例：

分离规则：一旦我们看到 $\alpha \to \beta$ 和 α，我们就可以写下 β。

这门课的内容

逻辑的语法：对真的基于规则的刻画

* 我们除了希望这样一套规则正确地刻画了真，还希望它能够被机械地运用（编成一个程序让计算机自动运行）。

例：

分离规则：一旦我们看到 $\alpha \to \beta$ 和 α，我们就可以写下 β。

这门课的内容

逻辑的语法：对真的基于规则的刻画

* 我们除了希望这样一套规则正确地刻画了真，还希望它能够被机械地运用（编成一个程序让计算机自动运行）。

例：

分离规则：一旦我们看到 $\alpha \to \beta$ 和 α，我们就可以写下 β。

这门课的内容

- 我们不能证明一阶逻辑的语义或语法正确地刻画了我们对真的直观（为什么？）。但我们可以证明：

可靠性与完全性

一阶逻辑的语义和语法刻画的是同一个直观。即，从语义角度来看被认为是真的句子，从语法角度来看也被认为是真的。

- 我们从两个角度来刻画真，得到了同样的东西。

这门课的内容

- 我们不能证明一阶逻辑的语义或语法正确地刻画了我们对真的直观（为什么？）。但我们可以证明：

可靠性与完全性

一阶逻辑的语义和语法刻画的是同一个直观。即，从语义角度来看被认为是真的句子，从语法角度来看也被认为是真的。

- 我们从两个角度来刻画真，得到了同样的东西。

这门课的内容

- 我们不能证明一阶逻辑的语义或语法正确地刻画了我们对真的直观（为什么？）。但我们可以证明：

可靠性与完全性

一阶逻辑的语义和语法刻画的是同一个直观。即，从语义角度来看被认为是真的句子，从语法角度来看也被认为是真的。

- 我们从两个角度来刻画真，得到了同样的东西。

预备知识——集合论

什么是集合论？

- 什么是集合论？

  集合论是关于集合的理论（废话）

- 什么是集合？

  集合论告诉我们哪些是集合（循环了？）

我们必须预设我们有对集合的直观，我们希望集合论关于集合的描述符合我们的直观

什么是集合论？

- 什么是集合论？
  集合论是关于集合的理论（废话）
- 什么是集合？
  集合论告诉我们哪些是集合（循环了？）

我们必须预设我们有对集合的直观，我们希望集合论关于集合的描述符合我们的直观

什么是集合论？

- 什么是集合论？

  集合论是关于集合的理论（废话）

- 什么是集合？

  集合论告诉我们哪些是集合（循环了？）

我们必须预设我们有对集合的直观，我们希望集合论关于集合的描述符合我们的直观

什么是集合论？

- 什么是集合论？

  集合论是关于集合的理论（废话）

- 什么是集合？

  集合论告诉我们哪些是集合（循环了？）

我们必须预设我们有对集合的直观，我们希望集合论关于集合的描述符合我们的直观

什么是集合论？

- 什么是集合论？

  集合论是关于集合的理论（废话）

- 什么是集合？

  集合论告诉我们哪些是集合（循环了？）

我们必须预设我们有对集合的直观，我们希望集合论关于集合的描述符合我们的直观

什么是集合论？

- 集合论如何描述我们对集合的直观？

  公理化的方法。公理集合论是一种一阶逻辑理论。

  例：

  - $\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y))$（外延公理）
  - $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee x = z))$（对集公理）

- 集合论对逻辑的依赖

  例：$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$

什么是集合论？

- 作为数学基础的集合论
    - 所有数学概念可以在集合论中得到定义

      例：自然数 $0, 1, 2, \ldots$
    - 在上述定义下，所有数学定理可以被解释为集合论的定理

什么是集合论？

- 逻辑学作为数学的一个分支也可以被嵌入到集合论中

例：

- 语法方面：符号是集合、公式是符号的序列，证明是公式的序列
- 语义方面：结构是对语言中 n 个符号解释的 n 元组，对符号的解释是一个函数

集合论与一阶逻辑是什么关系？

- 集合论可以被看作是一种一阶逻辑理论
- 一阶逻辑的语法、语义概念都可以在集合论中定义，关于一阶逻辑的定理可以被看作是集合论的定理