力迫法 Forcing.

我们的目标：

$Con(ZFC) \to Con(ZFC + CH)$

$Con(ZFC) \to Con(ZFC + \neg CH)$

$Con(ZF) \to Con(ZF + AC) = Con(ZFC)$ so $Con(ZF) \to Con(ZFC + CH)$ ⋮

$Con(ZF) \to Con(ZF + \neg AC)$

什么是 ZF, ZFC, AC, CH ?

集合论的形式语言：一个只带有一个二元谓词符号的一阶语言。

符号：$($, $)$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\forall$, $\exists$,

$v_0, v_1, v_2 \cdots$

$=$, $\in$

e.g. $\forall x(\underbrace{\exists z(z\in x)}_{x\neq\emptyset} \to \exists y(y\in x \wedge \forall z(z\in x \to \neg z\in y$

基础公理。

公式即符号按照一定句法规则排列的序列。

ZF 公理：

1. 外延公理， 2. 分离公理模式 3. 对集公理 4. 并集公理， 5. 替换公理模式
6. 幂集公理， 7. 基础公理， 8. 无穷公理， 9. 选择公理 (AC)。

$ZFC = ZF + AC$ (交叉数解释)。

什么是一个证明？

一个证明是一个有穷的句子序列。例如从 ZF 出发的证明。其中的每个公式，要么是逻辑公理 ($x=x$, $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta) \cdots$), 要么是 ZF 中句子，要么是从
$\forall x\,\varphi(x) \to \varphi(t)$

一个推演规则从之前的句子得来的 (如 $\ldots \varphi\to\psi$, φ, $\psi \cdots$)。

~~什么是一个~~

我们说，如，$ZF \vdash \varphi$，即存在一个从 ZF 到 φ 的证明序列。

注意，由于 $\alpha\wedge\neg\alpha \to \beta$ 是一条逻辑公理，所以从一个矛盾式 $\alpha\wedge\neg\alpha$ 可以推出任何结论。

什么是一致？

如果一个理论（公式集，公理系统）~~是一致的~~能推出矛盾，那么它就能推出任何结论，~~[illegible]~~在这个公理系统中工作就毫无意义了！

所谓 Σ 是一致的，即 Σ 推不出矛盾，也即存在 Σ 推不出的公式。

如果我们把 ZFC 作为我们的基础公理系统，我们当然希望（能证明）它是一致的。

另外，$\mathrm{Con}(ZFC+CH) \iff ZFC+CH \nvdash 0=1$

$\iff ZFC \nvdash \neg CH \qquad (\Sigma \vdash \Delta \iff \Sigma,\neg\Delta \vdash 0=1)$

所以如果证明了 $\mathrm{Con}(ZFC+CH)$，及 $\mathrm{Con}(ZFC+\neg CH)$

即证明了，$ZFC \nvdash \neg CH$ 且 $ZFC \nvdash CH$。所以 CH 就是独立于我们的公理系统的了！！

怎样证一致性？

要证明一致性，本质就是证"推不出"，如要证 ZFC+CH 一致，只要证 $ZFC \nvdash CH$。

那怎么证推不出？

一般，当我们证明一个公式 φ 不能从一个系统 S 中推出来，我们只需找到一个性质 P，我们证明所有系统 S 的公理（如 ZFC 的逻辑公理和集合论公
都具有该性质，且 S 的推理规则保持该性质。（如，若 $P(\varphi\to\psi)$ 且 $P(\varphi)$，则 $P(\psi$
最后我们证 φ 不具有 P 性质。

~~一个[illegible]逻辑的例子（[illegible]）~~

语义解释

形式语言是一堆符号串，它们的意义？

命题逻辑 —— 真值表　　e.g.

p	q	$p\to q$
1	0	0
0	1	1
0	0	1

这说是对 → 这个逻辑符号意义的解释

命题逻辑公理系统 PL
$$\left.\begin{array}{l}(A1)\ \vdash p\to(q\to p)\\(A2)\ p\to(q\to r)\to(p\to q)\to(p\to r)\\(A3)\ (\neg p\to\neg q)\to(q\to p)\end{array}\right)$$

命题逻辑系统的完全性

对任意命题逻辑公式 φ，　$\vdash_{PL}\varphi$　当且仅当 φ 是重言式（即在任何 φ 中命题变元的赋值下，根据真值表 φ 的值都为真）。

所以我们有了一套固定的，证明 PL 中不可证的方法：

要证 $\nvdash_{PL}\varphi$，只需要找到一个赋值 v，使得 $v(\varphi)=0$，即可。

因为 PL 可证的公式 φ 都满足 "$v(\varphi)=1$" 这个性质。

思考：怎么证明：A2 独立于 A1 + A3？　（非正规真值表，见 email 附件4）

来到谓词逻辑

模型，结构 — 谓词逻辑的语义

以集合论语言 $\mathcal{L}_{ST}$ 为例，它比命题逻辑语言多了 量词：$\forall$，$\exists$，

等词：$=$

一个二元谓词符号：$\in$。

一个 $\mathcal{L}_{ST}$ 的结构是一个二元组 (M,E)，其中 M 是一个集合，解释 $\forall$，和 $\exists$ 是什么意思，

E 是 M 上的一个二元关系，解释 $\in$ 是什么意思。

Ex：$\forall x\forall y(x\in y\to y\in x)$ 在 (M,E) 的解释下为真，即 $(M,E)\models\forall x\forall y(x\in y\to y\in x)$

当且仅当 对任意 M 中元素 x，任意 M 中元素 y，若 x 与 y 有 E 关系（即 $(x,y)\in E$）

则 y 与 x 有 E 关系（$(y,x)\in E$）

注：若 $(M,E)\models\forall x\forall y(x\in y\to y\in x)$

$(M,E)\models\forall x(\neg x\in x)$

则 (M,E) 是一个图 (graph)

集合论语言和图论语言是一样的。

以算术语言 L_A 为例

L_A 除了 (,), →, ¬, ∀, ∃, $v_0, v_1, v_2 \cdots$

还有两个常元符号：0, 1,

一个一元函数符号：S （后继）

三个二元函数符号：+, ·, E

一个二元谓词符号：<

所以，一个 L_A 的结构（解释）是一个 八元组：例如：$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, S, +, \cdot, E, <)$

或 $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, S^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, E^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$

或 $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, \ldots)$

句子 $\alpha = \forall x(Sx \neq 0)$ 在 $\mathfrak{N}$ 的解释是：

对任何自然数 n，n 的后继不是 0，成立，故 $\mathfrak{N} \models \forall x(Sx \neq 0)$.

但显然 $\mathfrak{Z} \not\models \forall x(Sx \neq 0)$, $\mathfrak{R} \not\models \alpha$.

考虑 $\delta =$ ~~$\forall x \forall y \exists z (x < y \wedge$~~ $\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y))$

则 $\mathfrak{N} \not\models \delta$, $\mathfrak{Z} \not\models \delta$, $\mathfrak{R} \models \delta$.

所以一个句子是否为真，要在特定的解释下来看。

真定义（交助教）

逻辑真与完全性定理

有一些句子是在任何解释下都真的，如 $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$$\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to \forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x)$$

在任何解释下真的公式，称作有效式。

我们把一些有效式收集起来，作为逻辑公理，建立了一阶谓词逻辑（细节问助教）。

$\vdash \varphi$ 表示 φ 是一阶逻辑可证的。　$\Sigma \vdash \varphi$，从 Σ 可证的。

$\models \varphi$ 表示 φ 是逻辑有效的。　$\Sigma \models \varphi$，对任何结构 $\mathfrak{A}$，若 $\mathfrak{A} \models \Sigma$，则 $\mathfrak{A} \models \varphi$.

哥德尔完全性定理

$\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$.

$\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi$.

所以当我们想证明 $\Sigma \nvdash \varphi$ 时，我们可以找一个结构 $\mathfrak{A}$，使得 $\mathfrak{A} \models \Sigma$，但 $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

即证明 $\Sigma \not\models \varphi$.

其实我们找到了一个性质"在 $\mathfrak{A}$ 中真"，这个性质对所有公理公式，及其推论都成立，但对 φ 不成立！

那么，我们要证明 Con(ZFC+CH)，就只需要找一个 ZFC 的模型 M，(若 $ZFC \nvdash \neg CH$)

使得 $M \vDash CH$ 就行了？

<u>Wait a minute!</u>

凭什么这样我们就能说我们"证明"了 Con(ZFC+CH)？

一个理想的情况是，我们接受 ZFC 或 ZF 或 PA，并且在 ZFC 中证明 Con(ZFC+CH).

<u>这看似可能</u>：所有的语言中的组件，都可以看作是一个集合/自然数（可数语言），····

语义解释（模型、结构）也是集合。$(M,E) \vDash \varphi$ 是一个集合论公式.

但 <u>哥德尔第二不完全性定理</u>　　$ZF \nvdash Con(ZF)$

$ZFC \nvdash Con(ZFC)$ ……　$PA \nvdash Con(PA)$

(注：显然 $ZFC \vdash Con(PA)$. 因为 $ZFC \vdash (N,+,\cdots) \vDash PA$).

因为，显然我们不能期望 $ZF \vdash Con(ZFC)$ 或 $ZFC \vdash Con(ZFC+CH)$ . .

<u>相对一致性证明</u>

好在，我们对 ZF 都能接受，对 AC 有所怀疑，而我们可以期望

$\cancel{ZFC \vdash Con(ZFC)}$ $ZF \vdash Con(ZF) \to Con(ZFC)$.

<u>紧致性定理</u>（完全性定理的一个推论）

<u>若 $\Sigma \vdash \varphi$，则存在 Σ 的一个有穷子集 $\Sigma_0 \vdash \varphi$.</u>

故要证明 Σ 一致，我们只需证 Σ 的一个有穷子集一致

要证，例如 $Con(ZFC) \to Con(ZFC+\neg CH)$，只要证：

若 $ZFC+\neg CH$ 的某个有穷子集不一致，那么我们就可以找到 ZFC 的一个有穷子集已经不一致了！

<u>为什么强调这点？</u>

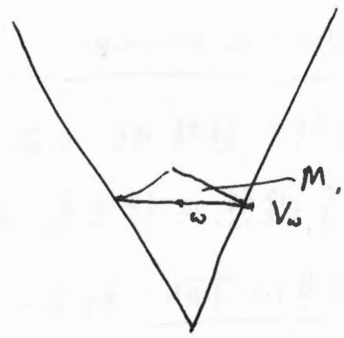
我们就要证 $Con(ZFC) \to Con(ZFC+\neg CH)$，我们假设 $Con(ZFC)$，由完全性，即可假设存在一个 ZFC 的模型 M，我们改造 M，使之成为 $ZFC+\neg CH$ 的模型就完了。

(M,E)　　(M,E)

(未完)

但是要确保 $M^{(M,E)}$ 能被改造成 ZFC+¬CH 的模型，我们希望 $M^{(M,E)}$ 容易理解一些。特别地，我们会假设 M 是传递的。(什么是传递的？助教)

因为如果 M 是传递的，则 M 上的二元关系，就是 $\in$，
即 $(M,E)=(M,\in)$。所以 (M,E) 中的很多情况"从 M 中看"
与"从 V 中看"是一样的，我们后面会定义，叫"绝对的"



但是 假设"存在一个 ZFC 的传递模型"比 Con(ZFC)
要强得多！

事实上，如果 M 是 ZFC 的一个传递模型，那么 $V_\omega\in M$，(因为 $M\models\exists\omega$，而"being ω"是绝对的)
显然 Con(ZFC)，再由向下的 LST 定义，就存在一个可数的 ZFC 模型，N。
特别地，它的 universe 是 $\subseteq\omega$ 的，那么 N 就是 M 中的一个 ZFC 模型。
而"是 ZFC 模型"是绝对的，所以 $M\models$ ZFC + Con(ZFC)。
同理，Con(ZFC+Con(ZFC))，.... 所以 $M\models$ ZFC+Con(ZFC)+Con(ZFC+Con(ZFC))
⋮
所以，假设存在一个 ZFC 的传递模型，至少相当于假设了 Con(ZFC)+Con(ZFC+Con(ZFC))+...

但是，事实上，我们只要假设存在一个 ZFC 的足够大的有穷片段的传递模型 M，
并把它改造成 ZFC+¬CH 的一个足够大的有穷片段的模型 M'
并且，~~若~~ 我们通过增加前者，可以一般地改造成 ZFC+¬CH 的任意大的有穷片段的模型！

基础公理的相对一致性

我们证明 $Con(ZF^-) \to Con(ZF)$. 其中 ZF^- 是 ZF − 基础公理.

基础公理：$\forall x(x \neq \phi \to \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to z \notin y)))$

定义 x 是良基集，若 $x = \phi$ 或 $\exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to z \notin y))$，即 x 有 $\in$-极小元.

则 基础公理：每个集合都是良基集.

想法 假设 $Con(ZF^-)$，即存在模型 $(N, E^N) \models ZF^-$，~~我们将N中的非良基集~~

我们定义 (N, E^N) 的一个子结构 (M, E^M) [$M \subseteq N$，且 $E^M = M^2 \cap E^N$. 则对任 $a, b \in M$，$a E^M b \Leftrightarrow a E^N b$，所以我们之后直接写 aEb，不会有歧义] 使得 M 中只有良基集.

从而 $(M, E) \models$ 基础公理，但 M 中还要有足够多的集合使得 $(M, E) \models ZF$.

层垒谱系

定义 对任意序数 α，递归定义

(1) $V_0 = \phi$

(2) $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$

(3) $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ 若 α 是极限序数.

注：由递归定义定理，我们实际上是给出了一个公式 φ，当我们写 $x = V_\alpha$ 时，我们实际上在写一个集合论公式 $\varphi(x, \alpha)$，当我们写 $x \in V_\alpha$ 时，我们实际在写 $\exists y(\varphi(y, \alpha) \wedge x \in y)$，…

注2：要证明定义是良定义，需要幂集公理，替换公理…(存在性)，外延公理(唯一性).

定义 $WF = \bigcup_{\alpha \in ON} V_\alpha$. 当我们写 $x \in WF$ 时，我们实际上在写 $\underbrace{\exists \alpha(\alpha \in ON \wedge \exists y(\varphi(y, \alpha) \wedge x \in y))}_{\varphi_{WF}(x)}$

定义 对任意集合 $x \in WF$（即 $\exists \alpha\, x \in V_\alpha$），定义 $rank(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\}$

注 x 总是首先出现于某个 $V_{\alpha+1}$，极限步没有新的集合"被造出".

为证明 $Con(ZF^-) \to Con(ZF)$.

假设 $N \models ZF^-$

定义 $M = WF^N = \{a \in N \mid \underbrace{N \models a \in WF}_{N \models \varphi_{WF}(a)}\}$　　注: $N \models \varphi_{WF}(a)$ 是一个集合论公式 $\Phi(N, \varepsilon^N, a)$ 故 M 是集合.

我们希望证明 $(M, E) \models ZF$.

<u>外延公理</u>: $(M,E) \models \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$

任给 $a, b \in M$, 定义 $a^N = \{x \in N \mid x E a\}$　$b^N = \{x \in N \mid x E b\}$

$a^M = \{x \in M \mid x E a\}$　$b^M = \{x \in M \mid x E b\}$

只需证: 若 $a^M = b^M$, 则 $a = b$.

而由 $(N, E) \models$ 外延公理, 已有 若 $a^N = b^N$, 则 $a = b$.

故只需证 $a^M = a^N$, 且 $b^M = b^N$. 就完了.

<u>定义</u> M 是 N 的子结构, 说 $\boxed{M \text{在} N \text{中传递}}$, 即对任意 $a \in M$, $a^M = a^N$.

注: 回忆 集合 X 是<u>传递的</u> 的定义.

<u>引理</u> 令~~$M = WF^N$~~设 $N \models ZF^-$, 令 $M = WF^N$, 则 M 在 N 中传递.

证: 设 $a \in M$, 显然有 $a^M \subseteq a^N$, 现任给 $b \in N$, $b E a$, (即 $b \in a^N$) 要证 $b \in M$.

由 $a \in M$ 即 $N \models a \in WF$.

在 N 中工作:

$a \in WF$, 即, 存在 $\alpha \in ON$, 使 $a \in V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$,

即 $a \subseteq V_\alpha$, 故 $b \in a \subseteq V_\alpha$

因而 $b \in WF$

故 $N \models b \in WF$, 即 $b \in M$.

<u>引理</u> $\alpha, \beta \in ON$

$\alpha \le \beta \Rightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$

<u>对集公理</u> $M \models \forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$.

任给 $a, b \in M$, 我们要找到 $c \in M$, 使得 $c^M = \{a, b\}$.

由 $N \models$ 对集公理, 存在 $c \in N$, 使得 $c^N = \{a, b\}$. 由引理, 只需证 $c \in M$.

在 N 中工作

$c = \{a, b\}$, 且 $a, b \in WF$, 不妨设 $a, b \in V_\alpha$, 则 $c = \{a, b\} \subseteq V_\alpha$

故 $c \in V_{\alpha+1}$, 故 $c \in WF$

故 $c \in M$.

并集公理 $M\models \forall X\exists Y\forall z(z\in Y\leftrightarrow \exists w(w\in X\wedge z\in w))$

任给 $a\in M$，要找 $b\in M$，使得 $M\models b=\bigcup a=\{x\mid \exists y\in a(x\in y)\}$.

即 $b^M=\{x\in M\mid \exists c\in a^M(xEc)\}$

此时记作 $b=\bigcup^M a$.

由 $N\models$ 并集公理，存在 $b\in N$ 使得 $b=\bigcup^N a$

即 $b^N=\{x\in N\mid \exists c\in a^N(xEc)\}$

现只需证 $b\in M$ 且 $b=\bigcup^M a$. 即可.

为证 $b\in M$，我们在 N 中工作：

$b=\bigcup a$. 而 $a\in V_{\alpha+1}$ 即 $a\subseteq V_\alpha$.
那么对任 $x\in b$，存 $y\in a\subseteq V_\alpha$，使得 $x\in y$.
由 V_α 传递，$y\in V_\alpha\Rightarrow y\subseteq V_\alpha$，故 $x\in V_\alpha$.
故 $b\subseteq V_\alpha$，故 $b\in V_{\alpha+1}$，故 $b\in WF$

故 $b\in M$.

引理 对任 $\alpha\in ON$，V_α 是传递的.

由于 $b^N=b^M$，$a^N=a^M$. 欲证 $b=\bigcup^M a$，即证 $b^M=b^N=\{x\in M\mid \exists c\in a^M(xEc)\}$.

也即 $\{x\in N\mid \exists c\in a^N(xEc)\}=\{x\in M\mid \exists c\in a^M(xEc)\}$，也即.

要证：$\{x\in N\mid \exists c\in a^N(xEc)\}\subseteq\{x\in M\mid \exists c\in a^N(xEc)\}$.

假设 $d\in N$，且存在 c，$N\models c\in a\wedge d\in c$，只需证 $d\in M$.

在 N 中工作——

由 $a\in V_{\alpha+1}$，$a\subseteq V_\alpha$，则 $c\in V_\alpha$，则 $c\subseteq V_\alpha$，则 $d\in V_\alpha$，则 $d\in WF$. 故 $d\in M$.

注. 我们实际上证了对任 $a\in M$，$\bigcup^M a=\bigcup^N a$.

分离公理 对任 $\varphi(x,y_1\cdots y_n)$，$p_1\cdots p_n\in M$，有 $M\models\forall X\exists Y\forall z(z\in Y\leftrightarrow z\in X\wedge\varphi(z,p_1\cdots p_n))$

任给 $a\in M$，要找 $b\in M$，使得 $M\models b=\{x\in a\mid \varphi(x,p_1\cdots p_n)\}$

即 $b^M=\{x\in M\mid x\in a^M\wedge M\models\varphi(x,p_1\cdots p_n)\}$

记作. $b=(\{x\in a\mid\varphi(x,p_1\cdots p_n)\})^M$

考虑直接运用 N 上的分离公理：找到 $b\in N$ 使得 $N\models b=\{x\in a\mid\varphi(x,p_1\cdots p_n)\}$，

即 $b^N=\{x\in N\mid x\in a^N\wedge N\models\varphi(x,p_1\cdots p_n)\}$

当我们想证明 $b^N=\{x\in M\mid x\in a^M\wedge M\models\varphi(x,p_1\cdots p_n)\}$ 时，我们需要 $N\models\varphi\Leftrightarrow M\models\varphi$，但这可能是错的.

相对化

定义 令 $M = \{x \mid \theta(x), \ldots\}$ 为类，~~φ 为公式~~，我们对公式的长度递归定义

公式 $\varphi^M = \varphi^\theta$：

(1) $(x=y)^M =_{df} x=y$

(2) $(x\in y)^M =_{df} x\in y$

(3) 若 φ, ψ 是公式 则 $(\varphi\to\psi)^M =_{df} \varphi^M \to \psi^M$.

(4) 若 φ 是……，$(\neg\varphi)^M =_{df} \neg\varphi^M$

(5) $(\forall x\,\varphi)^M =_{df} \forall x\in M\,\varphi^M = \forall x\,(\theta(x) \to \varphi^M)$

我们称 φ^M 是 φ 在 M 中的相对化.

命题 $M = \{x \mid \theta(x)\}$，N 是 模型，$p\in N$.

$M = \{x\in N \mid N\models \theta(x)\}$ 是 N 的子结构，则对任意公式 $\varphi(x_1\ldots x_n)$，对任意 $a_1\ldots a_n\in M$.

$$M\models \varphi(a_1\ldots a_n) \Leftrightarrow N\models \varphi^M(a_1\ldots a_n)$$

证 对 φ 长度归纳. 若 φ 是 $x_1=x_2$，则 $\varphi=\varphi^M$,

$$M\models x_1=x_2\,(a_1,a_2) \Leftrightarrow a_1=a_2 \Leftrightarrow N\models x_1=x_2\,(a_1,a_2)$$

若 φ 是 $x_1\in x_2$ 则

$$M\models x_1\in x_2\,(a_1,a_2) \Leftrightarrow a_1\in a_2 \Leftrightarrow N\models x_1\in x_2\,(a_1,a_2)$$

若 φ 是 $\varphi_1\to\varphi_2$ 则

$$\begin{aligned} M\models \varphi_1\to\varphi_2 &\Leftrightarrow \text{若 } M\models\varphi_1, \text{则 } M\models\varphi_2 \\ &\Leftrightarrow \text{若 } N\models\varphi_1^M, \text{则 } N\models\varphi_2^M \quad \text{— 归假} \\ &\Leftrightarrow N\models \varphi_1^M\to\varphi_2^M \\ &\Leftrightarrow N\models(\varphi_1\to\varphi_2)^M. \end{aligned}$$

$\neg\varphi$ 类似

若 φ 是 $\forall x\,\psi$ 则

$$\begin{aligned} M\models\forall x\,\psi &\Leftrightarrow \forall d\in M\; M\models\psi(d) \\ &\Leftrightarrow \forall d\in M\; N\models\psi^M(d) \quad \text{— 归假} \\ &\Leftrightarrow \forall d\in N\,[N\models\theta(d) \Rightarrow N\models\psi^M(d)] \\ &\Leftrightarrow N\models\forall x(\theta(x)\to\psi^M(x)) \Leftrightarrow N\models(\forall x\,\psi)^M \end{aligned}$$

$\square$

回到分离公理模式

~~由N中的分离~~ 由 $N \models \forall X \exists Y \forall z (z\in Y \leftrightarrow z\in X \wedge \varphi^{WF}(z, p_1 \cdots p_n))$

存在 $b\in N$，使得 $N \models b = \{x\in a \mid \varphi^{WF}(x, p_1 \cdots p_n)\}$

即 $b^N = \{x\in N \mid x\in a^N \wedge N \models \varphi^{WF}(x, p_1 \cdots p_n)\}$

$= \{x\in N \mid x\in a^M \wedge M \models \varphi(x, p_1 \cdots p_n)\}$

$= \{x\in M \mid x\in a^M \wedge M \models \varphi(x, p_1 \cdots p_n)\}$ （由于 $a^M \subseteq M$）.

现只需证 $b\in M$，在 N 中工作：

$b\in a$，$a\subseteq V_\alpha$，则 $b\subseteq V_\alpha$ 故 $b\in V_{\alpha+1}$

故 $b\in WF^N = M$.

故 $b^M = b^N$.

替换公理模式 φ 是公式，$p_1 \cdots p_n \in M$

~~若~~ 若 $M \models \forall x \exists! y \varphi(x, y, p_1 \cdots p_n)$

则 $M \models \forall X \exists Y \forall x\in X \exists y\in Y \varphi(x, y, p_1 \cdots p_n)$

任给 $A\in M$，我们需找 $B\in M$，使得 ~~[illegible]~~

$M \models \forall x\in A \exists y\in B \varphi(x, y, p_1 \cdots p_n)$

即 $\{y \mid \exists x\in A^M \varphi^M(x, y, p_1 \cdots p_n)\} \subseteq B^M$

考虑：$N \models \forall x \exists! y \underbrace{((x\notin WF \wedge y=\phi) \vee (x\in WF \wedge y\in WF \wedge \varphi^{WF}(x, y, p_1 \cdots p_n)))}_{\psi(x, y, p_1 \cdots p_n)}$

则 $N \models \forall X \exists Y \forall x\in X \exists y\in Y \psi(x, y, p_1 \cdots p_n)$.

~~[illegible]~~ 那么对任意 $A\in M$，存在 B 使得 $N \models \forall x\in A \exists y\in B \psi(x, y, p_1 \cdots p_n)$

即 $\{y \mid \exists x\in A^N\ N \models \psi(x, y, p_1 \cdots p_n)\} \subseteq B^N$

由于 $A^N = A^M \subseteq M$

有 $\{y \mid \exists x\in A^M\ N \models \varphi^{WF}(x, y, p_1 \cdots p_n) \wedge y\in WF\} \subseteq B^N$

则 $\{y \mid \exists x\in A^M\ N \models \varphi^{WF}(x, y, p_1 \cdots p_n)\} \subseteq B^N$

$\subseteq M$

只需证 $B\in M$，在 N 中工作：

$B = \{y\in WF \mid \exists x\in A\ \varphi^{WF}(x, y, p_1 \cdots p_n)\}$

故 $B\subseteq WF$，故 $B\subseteq V_\alpha$，故 $B\in WF$

故 $B\in M$

~~引理 若X是~~

引理若 X 是集合，且 $X\subseteq WF$

则存在 α，使 $X\subseteq V_\alpha$.

无穷公理 欲证：$M \models \exists x$（x是归纳集）即证存在 $w\in M$，是M中最小归纳集

令 $w\in N$ 是N中最小归纳集.

显然 $N\models w\in V_{w+1}\subseteq WF$，故 $w\in M$

令 a是N中空集. 显然 $a\in M$，而 $a^M=a^N=\phi$，故 a是M中空集，且 $a\in w^N=w^M$

[事实上 ~~$\phi^M=\phi^N$~~ a是M中空集，当且仅当 a是N中空集 当且仅当 $a^M=\phi$. $a^N=\phi$]

对任 $b\in w^N=w^N$，令 $S^N b$ 为 b在N中的后继.

即 $N\models S^N b=b\cup\{b\}$，即 $(S^N b)^N=\{x\in N\mid N\models x\in b\cup\{b\}\}$

$=b^N\cup\{b\}$

$=b^M\cup\{b\}$

$=\{x\in M\mid M\models x\in b\cup\{b\}\}$

$=(S^M b)^M$

故 $S^N b=S^M b\in w^N=w^M$

所以 w 确定是 M中的归纳集

而若 A是M中的归纳集，即 $M\models\phi\in A\wedge\forall x(x\cup\{x\}\in A)$

即 $\phi^M\in A$ 且对任 $b\in A^M$，$S^M b\in A^M$

则 $\phi^N\in A$ 且对任 $b\in A^N$，$S^N b\in A^N$（由 $\phi^N=\phi^M$，$A^M=A^N$，且对任 $b\in M$ $S^M b=S^N b$）

故 A也是N中归纳集

而对任 $a,b\in M$，$M\models a\subseteq b \Leftrightarrow a^M\subseteq b^M \Leftrightarrow a^N\subseteq b^N \Leftrightarrow N\models a\subseteq b$

故 w 也是 M中最小归纳集. [事实上，我们证明了，对任 $a\in M$，$M\models a$是最小归纳集 $\Leftrightarrow N\models a$是最小归纳集]

~~幂集公理 欲证：$M\models\forall x\exists y$~~

绝对性 注意，我们已证明 $a^N=a^M$，$\bigcup^M a=\bigcup^N a$，$\{a,b\}^N=\{a,b\}^M$，

$S^N a=S^M a$，$\phi^M=\phi^N$，$a\subseteq^N b\Leftrightarrow a\subseteq^M b$，$(A是归纳集)^N\Leftrightarrow(A是归纳集)^M$，....

定义 令N是集合论模型，M是N的子结构. $\varphi(\bar{x})$是集合论公式. 我们称 φ对 M,N是绝对的当且仅当 对任 $\bar{a}\in M$

$$M\models\varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N\models\varphi(\bar{a})$$

注意 $M=M^N=\{x\in N\mid\theta(x)\}$，又有 $M\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow N\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow N\models\varphi^M(\bar{a})$

例 若 M 在 N 中传递，则

1) $v_1 \in v_2$ 对 M, N 绝对，即对任 $a,b\in M$，$M \models a\in b$ ~~⟺ a∈b ⟺ N⊨a∈b~~.

⟺ $a \in b^M$

⟺ $a\in b^N$

⟺ $N\models a\in b$

注 $v_1\in v_2$ 对 M, N 绝对 等价于 $E^N \cap M^2 = E^M$

2) $\forall v_3(v_3\in v_1 \to v_3\in v_2)$ 对 M, N 绝对：对任 $A,B\in M$，

即 $v_1\subseteq v_2$

$M\models A\subseteq B$ ⟺ 对任 $a\in M$，$a\in A^M \Rightarrow a\in B^M$

⟺ 对任 $a\in N$，$a\in A^N \Rightarrow a\in B^M$ [由于 $A^N=A^M$，$B^N=B^M$ 且 $a\in A^N \Rightarrow a\in N$]

⟺ $N\models A\subseteq B$

注 $v_1\subseteq v_2$ 对 M, N 绝对 当且仅当 $\subseteq^N \cap M^2 = \subseteq^M$ 其中 $\subseteq^N = \{(a,b)\in N^2 \mid N\models a\subseteq b\}$，$\subseteq^M$ 类似

即对任 $a,b\in M$，$a\subseteq^N b \iff a\subseteq^M b$.

3) 若 M, N 满足外延公理，则 $v_1=\bigcup v_2$，即 $\forall v_3(v_3\in v_1 \leftrightarrow \exists v_4(v_4\in v_2 \wedge v_3\in v_4))$

对 M, N 绝对

对任，$X,Y\in M$，

$M\models X=\bigcup Y$ ⟺ 对任 $a\in M$，$a\in X^M$ 当且仅当 存在 $b\in M$，$b\in Y^M$ 且 $a\in b^M$

⟺ 对任 $a\in M$，$a\in X^N$ 当且仅当 存在 $b\in N$，$b\in Y^N$ 且 $a\in b^N$

⟺ 对任 $a\in N$，$a\in X^N$ - - - - -

⟺ $N\models X=\bigcup Y$

注，$v_1=\bigcup v_2$ 对 M, N 绝对，当且仅当，对任 $A\in M$，$\bigcup^M A = \bigcup^N A$ 即 $\bigcup^M = \bigcup^N \restriction N$.

~~$\{x\in M \mid \exists y\in A^M (x\in y^M)\}$~~ ~~$\{x\in M \mid N\models x\in\bigcup A\}$~~

"

~~$\{x\in M \mid M\models x\in\bigcup A\}$~~

其中 $\bigcup^M$ 是 M 中函数：

对任 $a\in M$，$\bigcup^M a = b\in M$，使得 $M\models b=\bigcup a$
唯一的

当且仅当 $(\bigcup^M A)^M = (\bigcup^N A)^N$

即 $\{x\in M \mid M\models x\in\bigcup A\} = \{x\in N \mid N\models x\in \bigcup A\}$

⊆ 显然

⊇ 只需 M 在 N 中传递：令 $x\in N$，且存在 $y\in N$，$y\in A^N$，$x\in y^N$.

由 $A^N=A^M$，$y^M=y^N\in M$.

故 $x\in y^M\subseteq M$.

幂集公理 要证：$M\models \forall X\exists Y\forall z(z\in Y\leftrightarrow z\subseteq X)$

任给 $A\in M$，我们要找 $B\in M$，使得对任 $a\in M$，$a\in B^M \Leftrightarrow a\subseteq^M A$

令 $P^N(A)\in N$ 是唯一的 B，使得 $N\models B=P(A)$. 我们证明 $B\in M$

在 N 中工作

$A\in WF$，设 $A\subseteq V_\alpha$，则 $B=P(A)\subseteq P(V_\alpha)=V_{\alpha+1}$，故 $B\in V_{\alpha+2}\subseteq WF$

现对任 $a\in M$，$a\in B^M \Leftrightarrow a\in B^N$

$\Leftrightarrow a\subseteq^N A$

$\Leftrightarrow a\subseteq^M A$

注：这里，$v_2=P(v_1)$ 即 $\forall v_3(v_3\in v_2\leftrightarrow v_3\subseteq v_1)$ 对 M,N 绝对.

因为 $v_2=P(v_1)$ 对 M,N 绝对当且仅当，对任 $A\in M$，$P^M(A)=P^N(A)$

而 $P^M(A)=P^N(A) \Leftrightarrow (P^M(A))^M=(P^N(A))^N$

$\Leftrightarrow \{x\in M\mid M\models x\subseteq A\}=\{x\in N\mid N\models x\subseteq A\}$

$\subseteq$ 方向，由 $\subseteq$ 对 M,N 绝对

而 $\supseteq$ 方向，用到了 M 的特殊构造：令 $x\in N$，$N\models x\subseteq A$，在 N 中工作

$x\subseteq A$，而 $A\in V_{\alpha+1}$，故 $x\subseteq A\subseteq V_\alpha$

故 $x\in V_{\alpha+1}$

故 $x\in M$.

替换公理 任给 $\varphi(x,y)$，若 $M\models\forall x\exists! y\,\varphi(x,y)$.

要证 $M\models \forall X\exists Y\forall x\in X\exists y\in Y\,\varphi(x,y)$

即任给 $A\in M$，要找到 $B\in M$，使得 $M\models \forall x\in A\exists y\in B\,\varphi(x,y)$.

考虑公式 $\psi(x,y)=(x\notin WF\wedge y=\emptyset)\vee(x\in WF\wedge y\in WF\wedge\varphi(x,y))$

则 $N\models\forall x\exists! y\,\psi(x,y)$

由 N 中替换公理，存在 $B\in N$，使得 $N\models\forall x\in A\exists y\in B\,\psi(x,y)$.

我们可以假设 B 是最小的，即 $N\models\forall b\in B\exists a\in A\,\psi(a,b)$ [由于 $N\models\exists B'(B'=\{b\in B\mid\exists a\in A\,\psi(a,b)\})$]

为证 $B\in M$，在 N 中工作

$A\in WF$，又 $\forall b\in B\exists a\in A\,(a\notin WF\wedge y=\emptyset)\vee(x\in WF\wedge y\in WF\wedge\varphi(x,y))$，故 $B\subseteq WF$.

故 $A\subseteq WF$ 故 $B\in WF$

由 ψ 定义，显然，$N\models(\forall x\in A\exists y\in B\,\varphi(x,y))^{WF}$ 即 $M\models\forall x\in A\exists y\in B\,\varphi(x,y)$.

基础公理 $M \models \forall X (X \neq \emptyset \to \exists y (y \in X \wedge \forall z (z \in X \to z \notin y)))$?

即 $N \models (\text{基础公理})^{WF}$

在N中证——

对任 $x \in WF$ 定义 $rank(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\}$，若 $x \in y$，则 $rank(x) < rank(y)$

[设 $rank(y) = \alpha$，则 $y \in V_{\alpha+1}$，故 $y \subseteq V_\alpha$，又 $x \in y$，故 $x \in V_\alpha$，

故 $rank(x) < \alpha$]

对任 $X \in WF$，$X \in V_{\alpha+1}$，$X \subseteq V_\alpha$，故 $X \subseteq WF$，若 $X \neq \emptyset$，存在 $y \in X$ $rank\, y = \min\{rank(z) \mid z \in X\}$

则不存在 $z \in y$，$z \in X$

$\Box$ $\vdash Con(ZF^-) \to Con(ZF)$

注意，在上述证明中，对任何ZF中公理 σ，要证 $M \models \sigma$，都可以等价地证 $N \models \sigma^{WF}$，即在N中工作，证 σ^{WF}，此时所能用到的只有 ZF^-，因为我们只知道 $N \models ZF^-$

即我们要从 ZF^-，对每个ZF公理 σ，证明 σ^{WF}。

这也说明了，为什么（讲义中定理）7.3.4可推出 $Con(ZF^-) \to Con(ZF)$，

注 7.3.4 要么被看作是个元定理，要么看作是 ZF^- 中证明的无穷个定理组成的定理模式。

注2，若我们认为对N的这些使用的"把握更大"，则用7.3.4的表述不行。